*

# Om deduktivt lukkede mengder av setninger.

*

Morten Rognes

1971

*

## Copyright beskrivelse

Dette arbeidet er © Morten Rognes 1998. Det er fullstendig fritt i den forstand at man kan kopiere det for eget bruk og distribuere kopier til andre så lenge dette ikke er for salg eller økonomisk vinning. *Kopier må være av arbeidet i sin helhet og i sin opprinnelige form slik det er distribuert her, og må i tillegg til denne copyright-beskrivelsen skrevet på norsk og engelsk, innholde versjonsnummer, versjonshistorie, samt dato og årstall for nedlasting.*

Det er lov til å sitere fra dette arbeidet i egne skrifter etter de regler og standarder som er internasjonalt akseptert for sitering i vitenskapelige publikasjoner. Under ingen omstendigheter er det lov å sitere deler av dette arbeid, eller hele dette arbeid på en slik måte at man utgir det for å være ens eget.

Henvisninger til dette arbeid bør inneholde de følgende data i en komma-separert liste: etternavnet til denne forfatteren, fornavnet til denne forfatteren, tittelen på arbeidet, årstallet det opprinnelig ble skrevet som angitt på tittelbladet, uttrykket "Upublisert", den fullstendige URL fra hvilket dette arbeidet ble lastet ned, data og årstall for nedlasting, samt versjonsnummeret angitt på tittelbladet. Eksempel:

> Rognes, Morten, "Undersøkelser i intensjonal logikk", 1973, Upublisert,
> http://www.uio.no/~mrognes/arbeider/mrog73a.sit.hqx, 4-4-98, v0.0d0.

## §1 Innledning. Deduktivt lukkede setningsmengder.

En deduktivt lukket mengde av setninger er en mengde med de følgende to egenskaper: (a) Er to setninger x og y med i den er også konjunksjonen av dem, som vi betegner med "K(x,y)", med i mengden. (b) Er x en setning som er med i mengden, og y en setning som er en logisk konsekvens av x, så er også setningen y med i mengden. Den minste deduktivt lukkede mengden av setninger som inkluderer alle elementene i en gitt setningsmengde X kalles for konsekvens-mengden til X og betegnes med "k(X)". k kan oppfattes som en operator som tilordner entydig en mengde med setninger X en annen mengde med setninger k(X). Vi skal i det følgende omtale denne operatoren som "k-operatoren". En av hensiktene med dette arbeidet er å bygge opp en systematisk teori for denne operatoren k. For å kunne gjøre dette er det nødvendig å kunne gi en presis definisjon av den. Dette kan uten spesielle vanskeligheter gjøres i rent mengdeteoretiske termer. I det følgende skal vi bruke "K(x,y)", der x og y er setninger, for å betegne konjunksjonen av de to setningene x og y. Videre skal vi bruke uttrykket "L(x,y)" som forkortelse for "x er en logisk konsekvens av y". Ønsker man å definere k-operatoren kan man da først definere predikatet "t er en deduktivt lukket setningsmengde som inkluderer mengden x", som vi forkorter med "Q(x,t)", ved å si at dette skal holde hvis og bare hvis de følgende betingelser er oppfylt:

(i) $(Ay)(y\hat{e}x \rightarrow y\hat{e}t)$
(ii) $(Az)(Aw)(z,w\hat{e}t \rightarrow K(z,w)\hat{e}t)$
(iii) $(Az)(Aw)(z\hat{e}t \,\&\, L(w,z) \rightarrow w\hat{e}t)$

Som man ser innebærer (i) at mengden x er inkludert i t. (ii) uttrykker at kon-junksjonen av to setninger er med i t om begge konjunktene er det, og endelig uttrykker (iii) at dersom w er en setning som er en logisk konsekvens av z, og z er et element i t, så er også w et element i t.

Siden k(x) skal være den minste av de mengdene t som er slik at Q(x,t) kan vi definere uttrykket "k(x)" ved å sette at $k(x) = SN(Mg(t: Q(x,t)))$. Denne definisjonen lar det stå åpent hvordan man skal definere predikatet "L(x,y)", ie. "x er en logisk konsekvens av y", og konjunksjonsoperatoren K. Logisk konsekvens lar seg imidlertid lett definere ved hjelp av logisk sannhet. Man kan si at en setning x er en logisk konsekvens av en setning y om kondisjonal-setningen som har y som antesedent og x som konsekvent er en logisk sannhet. Bruker vi "LogS(x)" som forkortelse for predikatet "x er en logisk sannhet" og "C(x,y)" som forkortelse for "kondisjonalsetningen som har x som antesedent og y som konsekvent" kan "L(x,y)" defineres ved:

$$L(x,y) = LogS(C(y,x))$$

Dette reiser i sin tur spørsmålet om hva som menes med at en setning er en logisk sannhet og hvordan vi eventuelt skal definere dette begrepet. Lar det seg definere generelt for alle beskrivende setninger? Teorien vi etterhvert vil konstruere lar dette spørsmålet være åpent. Faktisk vil vi ikke gi noen definisjon av predikatet "LogS(x)", men i stedet angi en del grunnleggende adekvansbetingelser som dette predikatet synes å måtte oppfylle om det skal tolkes som "x er en logisk sannhet". Faktisk vil vanlige definisjoner av "logisk sannhet" oppfylle disse kravene. Hvis vi for eksempel begrenser oss til et standard første-ordens språk, og definerer klassen av modeller for dette på vanlig måte, vil det være rimelig å si at en setning i dette språket er en logisk sannhet hvis og bare hvis den er sann i alle modeller for

språket. I så fall viser det seg at de adekvanskravene som vi etterhvert skal formulere er oppfylt. En presis formulering av disse kravene vil bli gitt på et litt senere stadium.

Definisjonen av uttrykket "k(x)" inneholdt operatoren K. I den systematisk teorien vil vi definere denne operatoren ved hjelp av to andre, nemlig C og N. C er den operatoren som til et par av setninger <x,y> tilordner dette den kondisjonalsetningen som har x som antesedent og y som konsekvent. N er den operasjonen som til enhver setning x tilordner setningen dens negasjon, N(x). Dette innebærer selvfølgelig at "N(x)" leses " negasjonen av setningen x". I selve den første-ordens teorien vi skal fremlegge er imidlertid ikke N og C primitive begreper. Språket til teorien er, slik vi definerer det, et første-ordens språk uten funksjonssymboler. I selve teorien blir derfor C og N definert ved hjelp de følgende to predikater: (i) "z er kondisjonalsetningen som har x som antesedent og y som konsekvent". Vi forkorter dette uttrykket med "Cd(z,x,y)". (ii) "y er negasjonen av setningen x". Dette forkortes ved hjelp av uttrykket: "Ng(y,x)". Gitt disse primitive predikatene kan så operatorene C og N defineres ved hjelp av beskrivelsesoperatoren "(ix)" slik:

$$C(x,y) = (iz)Cd(z,x,y)$$
$$N(x) = (iy)Ng(y,x)$$

Når det gjelder konjunksjonsoperatoren, operatoren for bikondisjonal og operasjonen disjunksjon kan disse defineres slik:

$$K(x,y) = N(C(x,N(y))$$
$$E(x,y) = K(C(x,y),C(y,x))$$
$$D(x,y) = N(K(N(x),N(y)))$$

Vi har nå gitt en redegjørelse for noen av de viktigste begrepene i den teorien som vi vil arbeide innenfor. I neste paragraf vil det bli gitt en formelt sett presis definisjon av teorien.

## §2 En formell definisjon av teorien om deduktivt lukkede setningsmengder.

Den teorien om deduktivt lukkede setningsmengder som vil bli utviklet i det følgende vil bli betegnet med "TDM". Dette uttrykket er da ment som forkortelse for uttrykket "Teori om deduktivt lukkede setningsmengder". TDM er formelt sett en vanlig første-ordens teori. Den vil være presist definert om vi angir språket til den, samt de aksiomene og slutningsreglene som inngår.

Språket til TDM er et vanlig første-ordens språk uten funksjonssymboler som inneholder de vanlige setningslogiske konnektivene, allkvantoren, eksistenskvantoren samt to-plass predikatet "x er identisk med y".[1] Disse konstruksjonene inngår i det logiske vokabularet til teorien. I tillegg til disse logiske konstruksjonene inngår de følgende konstruksjoner (og bare dem) i det ikke-logiske vokabularet til teorien:

(1) "x er en setning" – "Setn(x)"
(2) "x er en logisk sannhet" – "LogS(x)"
(3) "x er et element i y" – "xêy"
(4) "z er kondisjonalsetningen som har x som antesedent og y som

[1] Det dreier seg om de følgende setningslogiske konnektiver "–>", "¬", "&", "<–>" og "v". Disse har sin vanlige betydning. Kvantorene er "(Ax)" og "(Ex)" som står for henhodsvis allkvantoren og eksistenskvantoren. "=" betegner identitet. Variabeltegnene i språket er offesielt, i "alfabetisk" rekkefølge: x, y, z, w, x', y', z', w', x",y",..... ad inf.

konsekvent" – "Cd(z,x,y)"

(5) "y er negasjonen av setningen x" – "Ng(y,x)"

Siden det ikke-logiske vokabularet til språket til TDM nå er fastsatt er også språket definert. Formlene i språket dannes etter de vanlige regler. I det følgende beteger vi dette språket med "L".

I språket L inngår ikke termer av typen "mengden av alle de objekter x som er slik at F(x)" der "F(x)" representerer en åpen setning i L med en eller flere frie forekomster av variabeltegnet x. Vi forkorter termer av denne typen med "Mg(x: F(x))" og refererer til denne typen av termer som "mengdeabstraksjons-termer", eller litt kortere som "mengdeabstrakter". I det følgende vil "a", "b", "c" etc. brukes som syntakstiske variabler som tar mengdeabstrakter som verdier. Selvom mengdeabstrakter ikke offisielt inngår i L innføres de imidlertid kontekstuelt på den måten som er angitt i Quine [1], §2 og §3. Dette innbærer at vi må forklare hvordan de elimineres når de forekommer på et eller flere steder i en atomisk formel i L, dvs. på et eller flere variabelsteder i en formel av typen "F(x;1,...,x;n)", hvor F er et n-ært predikat i L. La oss se på de forskjellige tilfellene.

For det første kan mengdeabtrakter forekomme på det første eller det andre variabelstedet i en åpen setning av typen "xêy". Det kan også forekomme på begge steder. Forekommer en mengdeabstraksjonsterm bare på det andre variabelstedet vil man ha for seg en setning av typen: "xêMg(y: F(y))". Setninger av denne art brukes som forkortelse for "F(x)". I det første tilfellet kan et mengdeabstrakt forekomme umiddelbart foran "ê" i en setning av typen "xêy". Man kan med andre ord ha for seg en setning som er av den følgende art: "Mg(x:F(x))êy". En slik setning brukes som forkortelse for "(Ez)(z= Mg(x: F(x)) & zêy". I tilfelle man har en setning av formen "aêb" der a og b er mengde-abstrakter skal denne oversettes med "(Ey)(y= a & yêb)". Dette viser hvordan megdeabstrakter kan elimineres i alle sammenhenger av typen "t;1êt;2" hvor t;1 og t;2 enten er et variabeltegn eller en mengdeabstraksjonsterm.

Imidlertid kan mengdeabstrakter også forekomme på en eller begge sidene av tegnet "=". Reglene for eliminasjon av disse termene er da disse: En setning av typen "x= a" erstattes med "(Ay)(yêx <–> yêa)". Her kan så mengdeabstraktet a i "yêa" erstattes etter den regelen som ble nevnt i forrige avsnitt. På tilsvarende vis erstattes en setning av typen "a=x" med "(Ay)(yêa <–> yêx)" og en setning som "a=b" med "(Ay)(yêa <–> yêb)".

Mengdeabstrakter kan forekomme på variabelstedene i setninger av typen "Setn(x)" og "LogS(x)". I denne forbindelse er regelen at man erstatter "Setn(a)" med "(Ex)(x=a &Setn(x))". Dreier det seg om en setning av typen "LogS(a)" erstattes denne med "(Ex)(x=a & LogS(x)".

Mengdeabstrakter kan selvfølgelig også forekomme på variabelstedene i predikatet Cd. Man kan f.eks. tenke seg en formel av typen "Cd(t;1,t;2,t;3)" hvor f.eks. t;1 og t;2 er variabeltegn, men hvor t;3 er et mengdeabstrakt. Regelen for eliminasjon av mengdeabstraksjonstermer i slike sammenhenger er denne:

En formel av typen "Cd(t;1,t;2,t;3)" hvor t;1,t;2 og t;3 enten er variabeltegn eller mengdeabstrakter brukes som forkortelse for:

(1) (Ex)(Ey)(Ez)(Cd(x,y,z) & x= t;1 & y=t;2 & z= t;3)

I (1) sløyfer vi konjunkten som inneholder t;i og den tilsvarende eksistens-kvantoren om t;i er et variabeltegn. Variabeltegnene x,y og z må også velges ut slik at de er de tidligste i den alfabetiske ordningen av variabeltegnene som kommer etter dem som forekommer i formelen

"Cd(t;1,t;2,t;3)". Dette innebærer at en formel som f.eks. "Cd(Mg(z: Set(z)),x,y)" brukes som forkortelse for formelen "(Ew)(Cd(w,x,y) & w = Mg(z: Set(z)))".

Endelig brukes en helt tilsvarende regel for å eliminere mengdeabstrakter i setninger av typen Ng(t;1,t;2) der t;1 og t;2 enten er et variabeltegn eller en mengdeabstraksjonsterm. En slik setning erstattes med en av formen:

(2) (Ex)(Ey)(Ez)(Ng(x,y) & x= t;1 & y=t;2)

Her sløyfes den konjunkten som inneholder t;i og den korresponderende eksistenskvantoren om t;i er et variabeltegn.

Vi har nå gjort rede for hvordan mengdeabstraksjonstermer kan elimineres i alle mulige atomiske kontekster.

Den måten å eliminere mengdeabstrakter på som er forklart ovefor er i det vesentlige hentet fra Quine [1]. I det følgende vil vi ha bruk for en rekke mengdeteoretiske begreper. Disse kan defineres nøyaktig som i den første delen av Quines bok. Vi gir for oversiktens skyld den følgende definisjon av en rekke velkjente mengdeteoretiske uttrykk. Denne definisjonen er helt i overenstemmelse med de tilsvarende definisjoner i Quines bok. Den eneste forskjellen har å gjøre med notasjonen siden vi her ikke råder over nøyaktig det samme tegnsett som det Quine bruker.

**Definisjon 2.1**

(i) V = Mg(x: x= x)
(ii) ø = Mg(x: x≠x)
(iii) {a} = Mg(z: z= a)
(iv) {a,b} = Mg(z: z=a v z=b)
(v) UN(a) = Mg(x: (Ey)(xêy & yêa)
(vi) SN(a) = Mg(x: (Ay)(yêa –> xêy))
(vii) (ix)F(x) = UN(Mg(y: (Ax)(F(x) <–> x=y))
(viii) <a,b> = {{a},{a,b}}
(ix) r(a) = Mg(<x,y>: <x,y>êa)
(x) a ≤b <–> (Az)(aêz & (Ay)({y}êz –> yêz). –> bêz)
(xi) {,,,a} = Mg(x: x≤ a)
(xii) Pt(x) = Mg(y: y Inkl x)
(xiii) c(a) = Mg(z: ¬(zêa))
(xiv) a–b = Mg(z: zêa & ¬(zêb))

## §3 De logiske og ikke-logiske aksiomene. Formell definisjon av teorien TDM.

Så langt har vi bare spesifisert språket til teorien TDM. For å gjøre definisjonen fullstendig må vi spesifisere aksiomene og slutningsreglene i teorien. Aksiomene i teorien faller i to hovedklasser, de logiske og de ikke-logiske aksiomene. Som logiske aksiomer velger vi et vanlig standardsett for predikatlogikk med identitet tilpasset de setningslogiske konnektivene vi har nevnt og det faktum at vi offisielt har to kvantorer. Vi tenker oss at vi har valgt ut et sett hvor man bare behøver å bruke modus ponens og universell generalisering som slutningsregler. [2] Når det gjelder identitet tenker vi oss at vi bruker de følgende to

[2] Man kan f.eks. velge det kvantifikasjonsteoretiske systemet som er skissert på side 191 i Quine [2]. Et annet

standardaksiomskjemaer:

(I1) (Ax)(x=x)
(I2) x = y –> (F –> F') der det forutsettes at F' er som F eventuelt bortsett fra at F' har en fri forekomst av variabeltegnet y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x.

De ikke-logiske aksiomene i teorien TDM er av tre slag. For det første dreier det seg om visse rent mengdeteoretiske aksiomer. For det andre tar vi med en rekke aksiomer som sier noe mer bestemt om setninger og spesielt kondisjonal-setninger og setninger om negasjon, mao. aksiomer som karakteriserer predikatene "Setn(x)", "Cd(z,x,y)" og "Ng(y,x)". Den tredje typen av aksiomer karakteriserer predikatet "x er en logisk sannhet".

De mengdeteoretiske aksiomene er disse:

Me1 øêV
Me2 {x,y}êV
Me3 UN(x)êV
Me4 aΩxêV
Me5 Func(a) –> a"xêV
Me6 (Az)(zêx <–> zêy) –> x=y
Me7 {,,, x} êV

Siden vi har tatt med "=" som et primitivt logisk predikat i språket til L definerer vi det ikke. I Quine [1] er imidlertid identitet innført som et definert, ikke-primitivt, predikat. Det er da mer naturlig å gi ekstensjonalitetsaksiomet, Me6 en annen form. Også i denne teorien er det mulig å fjerne "=" fra det logiske vokbularet og innføre det som et primitivt predikat. Dette kan i så fall skje vd hjelp av den metoden som er beskrevet på side 12 – 15 i Quine [1]. Vi har imidlertid ikke gjort dette fordi fremstillingen av teorien blir unødig kronglete. Vi bemerker i denne forbindelse at man fra I1 og I2 kan utlede alle de kjente setningene innenfor identitetsteorien gitt de øvrige kvantifikasjonslogiske aksiomene.

De ikke-logiske aksiomene som har med setninger, kondisjonalsetninger og negasjonssetninger å gjøre er de følgende:

ST1 Setn(x) & Setn(y) –> (Ez)(Aw)(Cd(w,x,y) <–> w=z))
ST2 Setn(x) & Setn(y) & Cd(z,x,y) –> Setn(z)
ST3 Setn(z) & Cd(z,x,y) –> Setn(x) & Setn(y)
ST4 ¬Setn(x) v ¬Setn(y). –> ¬(Ez)Cd(z,x,y)
ST5 Setn(x) –> (Ey)((Az)(Ng(z,x) <–> z=y))
ST6 Setn(x) & Ng(y,x) –> Setn(y)
ST7 Setn(y) & Ng(y,x) –> Setn(x)
ST8 ¬Setn(x) –> ¬(Ey)Ng(y,x)
ST9 ¬Setn(ø)
ST10 (Ax)(xêa –> Setn(x)) –> aêV

Aksiomet ST10 forsikrer oss om at enhver mengde som bare inneholder setninger eksisterer.

Vi benytter oss også av den følgende definisjon som fastlegger betydningen til uttrykkene "C(x,y)", "N(x)", "K(x,y)", "D(x,y)" og "E(x,y)":

---

alternativ vil være å bruke det systemet som er gitt i Rognes [1].

**Definisjon 3.1**

(i) C(x,y) = (iz)Cd(z,x,y)
(ii) N(x) = (iy)Ng(y,x)
(iii) K(x,y) = N(C(x,N(y)))
(iv) D(x,y) = C(N(x),y)
(v) E(x,y) = K(C(x,y),C(y,x))

Når det gjelder logisk sannhet tar vi med de følgende aksiomer:

U1 Setn(x) & Setn(y) –> LogS(C(x,C(y,x)))
U2 Setn(x) & Setn(y) & Setn(z) –> LogS(C(C(x,C(y,z)),C(C(x,y),C(x,z))))
U3 Setn(x) & Setn(y) –> LogS(C(C(N(y),N(x)), C(x,y)))
U4 LogS(x) & LogS(C(x,y)) –> LogS(y)
U5 LogS(x) –> Setn(x)

Vi kan nå fullføre definisjonen av teorien TDM. Dette er den førsteordens teorien hvor språket er L og hvor de ikke-logiske aksiomene er er formlene Me1 – Me7, ST1 – ST10 og U1 – U4.

Fra de forklaringene som har blitt gitt angående hvordan mengdeabstrakter elimineres i forskjellige kontekster, samt definisjonene og aksiomene som har blitt gitt er det lett å se at alle teoremene i Del I i Quine [1] er utledbare. Noen setninger krever imidlertid et annet bevis. Dette gjelder satsen 6.6 i Quines bok. Beviset vil her være analogt, men man må ta i betraktning at mengdeabstrakter kan forekomme i andre kontekster enn bare dem av typen "aêb". Likeledes vil begrunnelsen for satsene 6.1 og 6.2 nå være en annen. Disse teoremene er enkle konsekvenser av identitetsaksiomene I1 og I2 som vi har nevnt ovenfor. Quines aksiom 13.1 følger fra substitusjonsaksiomet, Me5 ovenfor, og setningen {,,,x}êV.

Grunntrekkene i teorien TDM har nå blitt angitt. Det er derfor passende å definere de begrepene som vi hovedakelig er interessert i å undersøke. Uttrykket "t er en setningsmengde som inneholder Δ og og som er lukket under konjunksjon og logisk konsekvens" forkorter vi med "Q(Δ,t)". Uttrykket defineres slik:

**Definisjon 3.2** Q(Δ,t) <–>. (Ax)(xêΔ –> xêt) &
(Ax)(Ay)(x,yêt –> K(x,y)êt) & (Ax)(Ay)(xêt & L(y,x) –> yêt)

Ved hjelp av dette begrepet kan konsekvensmengden til setningsmengden x, k(x), defineres som den minste mengden t som er slik at Q(x,t):

**Definisjon 3.3** k(x) = SN(Mg(t: Q(x,t)))

Er Δ en eller annen setningsmengde kan man definere konsekvenssystemet til Δ med hensyn på setningsmengden y, k*(Δ,y), ved den følgende definisjon. Man setter først:

**Definisjon 3.4** Q;y(Δ,t) <–> (Ax)(xêy & xêΔ –> xêt) &
(Ax)(Az)(x,zêy & x,zêt –> K(x,z)êt) &
(Ax)(Az)(x,zêy &xêt& L(z,x) –> zêt)

Dernest defineres k*(Δ,y) ved:

**Definisjon 3.5** k*(Δ,y) = SN(Mg(t: Q;y(Δ,t)))

Vi skal også i det følgende innføre en operator ∑ som til enhver setningsmengde Δ tilordner en setningsmengde ∑(Δ) med de følgende egenskaper:

(i) Alle elementene i Δ er med i ∑(Δ).
(ii) Er x med i ∑(Δ) så er også N(x) med i ∑(Δ).
(iii) Er x, y med i ∑(Δ) så er også K(x,y) med.
(iv) Ingen andre elementer enn dem som er det etter (i) – (iii) er med i ∑(Δ).

Det er lett å definere ∑(Δ) ved hjelp av metoden som ble brukt ovenfor i forbindelse med k og k*. Vi definerer først predikatet H(Δ,t) ved:

**Definisjon 3.6** H(Δ,t) <–> ((Ax)(xêΔ –> xêt) & (Ax)(Ay)(x,yêt –> N(x), K(x,y)êt))

Dernest kan vi gi den følgende definisjon av "∑(Δ)":

**Definisjon 3.7** ∑(Δ) = SN(Mg(t: H(Δ,t)))

I det følgende skal vi studere operatoren k og undersøke hvilke lover som gjelder for den. Også egenskapene til en rekke begreper som kan defineres ved hjelp av denne operatoren vil bli undersøkt. I noe mindre utstrekning vil operatorene ∑ og k* bli studert. For k* gjelder lover som gjelder for dem til k. I noen grad gjelder dette også ∑.

Vi avslutter denne paragrafen med å gi bevis for noen satser som gjelder for K,N og L. Først betrakter vi:

**Teorem 3.1** Man har at følgende holder:

(i) Setn(x) & Setn(y) <–> Setn(C(x,y))
(ii) ¬Setn(x) v ¬ Setn(y) <–> C(x,y) = ø
(iii) Setn(x) <–> Setn(N(x))
(iv) ¬Setn(x) <–> N(x) = ø
(v) L(x,y) –> Setn(x) & Setn(y)
(vi) Setn(x) & Setn(y) –> Setn(K(x,y)) & Setn(E(x,y)) & Setn(D(x,y))
(vii) Setn(C(x,y)) & Setn(E(x,y)) & Setn(D(x,y)) –> Setn(x) & Setn(y)
(viii) ¬Setn(x) v ¬ Setn(y). <–> K(x,y) = ø
(ix) ¬Setn(x) v ¬ Setn(y). <–> E(x,y) = ø
(x) ¬Setn(x) v ¬ Setn(y). <–> D(x,y) = ø

Vi gir den følgende definisjon av predikatet "x er logisk ekvivalent med y", som forkortes "Ekv(x,y)". Merk at dette predikatet ikke må forveksles med operatoren E som anvendt på to setningen gir oss bikondisjonalen som har disse to setningene henholdsvis som venstre og høyre komponent.

**Definisjon 3.8** Ekv(x,y) <–> L(x,y) & L(y,x)

Den neste satsen viser endel elementære egenskaper til predikatene "LogS", "L" og "Ekv":

**Teorem 3.2** De følgende påstander holder:

(i) L(x,y) & L(y,z) –> L(x,z)
(ii) Setn(x) –> L(x,x)
(iii) L(x,y) –> L(N(y),N(x))
(iv) LogS(N(x)) –> (Aw)(Setn(w) –> L(w,x))
(v) LogS(x) –> (Aw)(Setn(w) –> L(x,w))
(vi) L(x,y) & L(z,y) <–> L(K(x,z),y)
(vii) L(x,D(y,z)) <–> L(x,y) & L(x,z)
(viii) L(C(y,x),z) <–> L(x, K(y,z))
(ix) Ekv(x,y) –> Ekv(y,x)
(x) Ekv(x,y) & Ekv(y,z) –> Ekv(x,z)
(xi) Setn(x) –> Ekv(x,x)
(xii) Ekv(x,y) –> (LogS(x) <–> LogS(y))

## §4 Teoremer om konsekvenssystemer.

I det følgende betegner "S" mengden av alle setninger. Vi gir den følgende, helt formelle, definisjon:

**Definisjon** S = Mg(x: Setn(x))

**Teorem 1** ΔêPt(S) –>Δ Inkl k(Δ)

**Bevis:** Anta (1) xêΔ og at ΔêPt(S). Anta for vilkårlig k at (2) Q(Δ,k). Fra dette og definisjonen av Q følger (3) (Ax)(xêΔ –> xêk), som sammen med (1) gir en (4) xêk. Men k var et vilkårlig element som oppfylte betingelsen (2). Det følger derfor at man har (k)(Q(Δ,k) –> xêk). I lys av Definisjon 3.3 impliserer dette xêk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 2** x,yêΔ –> K(x,y)êk(Δ)

**Bevis:** Anta for vilkårlig r at (1) Q(Δ,r). Fra dette og Definisjon 3.2 følger da:
(2) (Ax)(xêΔ –> xêr) & (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)
Forutsetningene i satsen impliserer i lys av (2) at K(x,y)êr. Men r var et vilkårlig element som oppfylte (1). Det følger derfor at (Ar)(Q(Δ,r) –> K(x,y)êr). Men fra dette har man ved hjelp av Definisjon 3.2 at K(x,y)êk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 3** ΔêPt(S) & xêΔ & yêk(Δ) –> K(x,y)êk(Δ)

**Bevis:** Anta for vilkårlig r at (1) Q(Δ,r). Fra dette og Definisjon 3.2 kan man slutte: (2) (Ax)(xêΔ –> xêr) & (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr). Nå følger det fra den andre forutsetningen i satsen og definisjonen av operasjonen k at
(3) (As)(Q(Δ,s) –> yês). Fra (3) og (1) har man at yêr som sammen med den andre forutsetningen og (2) gir en K(x,y)êr. Men r var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (1). Det følger at (Ar)(Q(Δ,r) –> K(x,y)êr). Ved hjelp av definisjonen av k kan man fra dette

konkludere med at K(x,y)êk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 4** ΔêPt(S) & x,yêk(Δ) –> K(x,y)êk(Δ)

**Bevis:** Ved hjelp av den andre forutsetningen og definisjonen av k følger:
(1) (As)(Q(Δ,s) –> x,yês). Anta for vilkårlig t at (2) Q(Δ,t). Da har man i lys av (1) at x,yêt, men også ved hjelp av definisjonen av Q, Definisjon 3.2, at
(Ax)(Ay)(x,yêt –> K(x,y)êt). Det følger at K(x,y)êt. Men t var et vilkårlig objekt som tilfredstilte kravet (2). Derfor har man (At)(Q(Δ,t) –> K(x,y)êt). Dette og definisjonen av k impliserer K(x,y)êk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 5** xêΔ & L(y,x). –> yêk(Δ)

**Bevis:** Anta for vilkårlig t at (1) Q(Δ,t). Ved hjelp av Definisjon 3.2 kan man da slutte (2) (Ax)(xêΔ –> xêt) & (Ay)(Ax)(xêt & L(y,x) –> yêt). Dette og de to andre forutsetningene i satsen impliserer (3) yêt. Men t var et vilkårlig objekt. Derfor har man (At)(Q(Δ,t) –> yêt). Herav følger ved hjelp av Definisjon 3.3 at yêk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 6** ΔêPt(S) & xêk(Δ) & L(y,x). –> yêk(Δ)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger ved hjelp av Definisjon 3.2 at
(1) (As)(Q(Δ,s) –> xês). Anta for vilkårlig r at (2) Q(Δ,r). (1) og (2) impliserer (3) xêr. Men fra (2) kan man slutte ved hjelp av definisjonen av Q at:

(4) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x) –> yêr)

(3), (4) og den tredje forutsetningen i satsen innebærer at yêr. Men y var et vilkårlig objekt, derfor har man (Ar)(Q(Δ,r) –> yêr). I lys av Definisjon3.2 følger herav yêk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 7** ΔêPt(S) & x,yêΔ & L(z,K(x,y)). –> zêk(Δ)

**Bevis:** Anta for vilkårlig r at (1) Q(Δ,r). Ved hjelp av Definisjon 3.1 følger

(2) (Ax)(xêΔ–> xêr)
(3) (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)
(4) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x). –> yêr)

Her impliserer (2), (3) og den andre forutsetningen i satsen at (5) K(x,y)êr. Men (4), (5) og den tredje forutsetningen impliserer zêr. Dette forutsetter at K(x,y)êV. Dette er det imidlertid lett å utlede fra forutsetningene og aksiomene i TDM. Vi skal derfor ta slike antagelser mer eller mindre for gitt i det følgende. Men r var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (1). Det følger at man har
(Ar)(Q(Δ,r) –> zêr). Fra dette følger så zêk(Δ) ved hjelp av Definisjon 3.2. **Q.E.D.**

**Teorem 8** ΔêPt(S) & x,yêk(Δ) & L(z,K(x,y)). –> zêk(Δ)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger ved hjelp av definisjonen av Q:
(1) (As)(Q(Δ,s) –> x,yês). Anta for vilkårlig r at (2) Q(Δ,r). Da følger i lys av (1) at (3) x,yêr. Men fra (2) og Definisjon 3.1 følger også:

(4) (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)

(5) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x). –> yêr)

Fra (3) og (4) kan man slutte K(x,y)êr. Dette sammen med den tredje forutsetningen i satsen, samt (5), gir en (6) zêr. Men r var et vilkårlig objekt der man hadde Q(Δ,r). Det følger at (Ar)(Q(Δ,r) –> zêr). Herav har man zêk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 9** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Δ;1 Inkl k(Δ;2) –> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)

**Bevis:** Man kan forholdsvis lett på basis av de aksiomene som er angitt vise at (+) k(Δ) Inkl S om Δ Inkl S. Det følger fra dette at k(Δ)êV, dvs. (Ey)(y=k(Δ)), om Δ Inkl S ved hjelp av aksiom ST10. Angående (+) er den satsen bevist i §6. Man kan i denne forbindelse studere beviset for Teorem 6.1 i §6. Anta for vilkårlige objekter r og x at

(1) (As)(Q(Δ;1,s) –> xês) & Q(Δ;2,r)

Fra dette følger siden vi har (Ey)(y= k(Δ;2)) (siden Δ;2êPt(S) og derfor Δ;2 Inkl S) at

(2) Q(Δ;1, k(Δ;2)) –> xêk(Δ;2))

Fra Teorem 4 og Teorem 6 har vi henholdsvis:

(3) (Ax)(Ay)(x,yêk(Δ;2) –> K(x,y)êk(Δ;2))

(4) (Ax)(Ay)(xêk(Δ;2) & L(y,x). –> yêk(Δ;2))

Fra (2), (3), (4) og definisjonen av Q kan man slutte:

(5) (Ax)(xêΔ;1 –> xêk(Δ;2)). –> xêk(Δ;2)

Dette impliserer i lys av den første hypotesen:

(6) xêk(Δ;2)

I sin tur har vi fra dette ved hjelp av Definisjon 3.2:

(7) (Ar)(Q(Δ;2,r) –> xêr)

(7) og (1) impliserer (8) xêr. Men r og x var vilkårlige ting slik at (1). I lys av Definisjon 3.2 og Definisjon 3.3 har man derfor :

(9) (Ax)(Ar)(xêk(Δ;1) & Q(Δ;2,r). –> xêr)

Dette er imidlertid ekvivalent med:

(10) (Ax)(xêk(Δ;1) –> (Ar)(Q(Δ;2,r) –> xêr))

Dette innebærer så ved hjelp av Definisjon 3.2 at (11) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). **Q.E.D.**

**Teorem 10** Δ;1,Δ;2êPt(S) & (Ex)(xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y)) –> ¬(Δ;2 Inkl k(Δ;1))

**Bevis:** Fra den første hypotesen følger at det finnes x slik at

(1) xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬ L(x,y))

Den andre konjunkten er her ekvivalent med (Ay)(L(y,x) –> ¬(yêk(Δ;1))).

Herav følger L(x,x) –> ¬(xêk(Δ;1)). Men L(x,x) er utledbar fra U1 – U5. Derfor:

(2) ¬(xêk(Δ;1)).

(1) og (2) impliserer åpenbart ¬(Δ;2 Inkl Δ;1). **Q.E.D.**

**Teorem 11** Δ;1,Δ;2êPt(S) –> (Δ;1 Inkl k(Δ;2) <–> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2))

**Bevis:** Den ene halvdelen følger fra Teorem 9. Den andre halvdelen er triviell i lys av Teorem 1. **Q.E.D.**

**Definisjon 4.1** k°(x) = Mg(y: yêk(x) & ¬LogS(y))

Med andre ord er k°(x) konsekvenssystemet til mengden x minus de logiske sannhetene i dette konsekvenssystemet. Man kunne derfor si at k°(x) er klassen av de "kontingente" setningene i x.

**Teorem 12** Δ;1,Δ;2êPt(S) –> [(Ex)(xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y))) –> ¬(k(Δ;1) Inkl k(Δ;2))]

**Bevis:** Denne satsen følger temmelig direkte ved hjelp av Teorem 10 og Teorem 11. **Q.E.D.**

**Teorem 13** Δ;1,Δ;2êPt(S) & ¬(Δ;2 Inkl k(Δ;1)). –> (Ex)(xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y)))

**Bevis:** Fra forutsetningene følger at det finnes noe x der man har:

(1) xêΔ;2 & ¬(xêk(Δ;1)).

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes y slik at yêk(Δ;1) & L(x,y). Ved hjelp av Teorem 6 følger da xêk(Δ;1). Men dette strider mot (1). Man har derfor:

(Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y)). Dette og den første konjunkten i (1) impliserer konsekventen i teoremet. **Q.E.D.**

**Teorem 14** Δ;1,Δ;2êPt(S) –> [¬(Δ;2 Inkl k(Δ;1)) <–> (Ex)(xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y)))]

**Bevis:** Satsen følger ved hjelp av Teorem 10 og Teorem 13. **Q.E.D.**

**Teorem 15** Δ;1,Δ;2êPt(S) –> [¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)) <–> (Ex)(xêΔ;2 & (Ay)(yêk(Δ;1) –> ¬L(x,y)))]

**Bevis:** Teoremet følger ved hjelp av Teorem 11 og Teorem 14. **Q.E.D.**

**Teorem 16** ΔêPt(S) –> k(k(Δ)) Inkl k(Δ)

**Bevis:** Anta (1) xêk(k(Δ)). Etter Definisjon 3.3 følger fra dette:

(2) (Ar)(Q(k(Δ),r) –> xêr)

Anta nå for vilkårlig s at (3) Q(Δ,s). Fra (3) og Definisjon 3.2 følger:

(4) (Ax)(xêΔ –> xês)

(5) (Ax)(Ay)(x,yês –> K(x,y)ês)

(6) (Ax)(Ay)(xês & L(y,x). –> yês)

Fra (2) følger, noe man lett ser:

(7) Q(k(Δ),s) –> xês

Anta nå for et eller annet y at (i) yêk(Δ). Da har man ved hjelp av Definisjon 3.3 at (Ar)(Q(Δ,r) –> yêr). Dette sammen med (3) gir en yês. Man har derfor:

(8) (Ay)(yêk(Δ) –> yês).

(5), (6) og (8) impliserer antesedenten i (7) og derfor at (9) xês. Men s var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (3). Derfor:

(10) (As)(Q(Δ,s) –> xês). Men i lys av Definisjon 3.3 er dette ekvivalent med xêk(Δ). **Q.E.D.**

**Teorem 17** ΔêPt(S) –> k(Δ) Inkl k(k(Δ))

**Bevis:** Denne påstanden følger ved hjelp av Teorem 1. **Q.E.D.**

Vi definerer:

**Definisjon 4.1** (i) k;0(Δ) = k(Δ)
(ii) k;(n+1)(Δ) = k(k;n(Δ))

**Teorem 18** (a) ΔêPt(S) –> k(Δ) = k(k(Δ))
(b) n≥0 & ΔêPt(S) –> k;n(Δ) = k(Δ)

**Bevis:** Når det gjelder (a) følger denne delen av satsen ved hjelp av Teorem 16 og Teorem 17. Den andre delen følger ved induksjon på n ved hjelp av (a). **Q.E.D.**

**Teorem 19** Δ;1,Δ;2êPt(S) –>. k(Δ;1ΩΔ;2) Inkl k(Δ;2) Inkl k(Δ;1UΔ;2)

**Bevis:** (a) Anta (1) xêk(Δ;1ΩΔ;2). I lys av Definisjon 3.3 impliserer dette:

(2) (As)(Q(Δ;1ΩΔ;2,s) –> xês)

Anta for vilkårlig r at (3) Q(Δ;2,r). Fra (3) og Definisjon 3.2 følger:

(4) (Ax)(xêΔ;2 –> xêr)
(5) (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)
(6) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x). –> yêr)

Fra (4) følger:

(7) (Ax)(xêΔ;1ΩΔ;2. –> xêr)

Fra (2) har man (8) Q(Δ;1ΩΔ;2,r) –> xêr. (5), (6) og (7) impliserer antesedenten i (8) i lys av definisjonen av Q. Derfor xêr. Men r var et vilkårlig element som oppfylte (3). Derfor: (Ar)(Q(Δ;2,r) –> xêr. Dette innebærer xêk(Δ;2) som er det vi ønsker.

(b) Anta (1) xêk(Δ;2). I lys av Definisjon 3.3 er dette ekvivalent med:

(2) (Az)(Q(Δ;2,z) –> xêz)

Anta nå for vilkårlig r at (3) Q(Δ;2UΔ;1,r). Etter Definisjon 3.2 innebærer dette:

(4) (Ax)(xêΔ;1UΔ;2 –> xêr)
(5) (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)
(6) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x). –> yêr)

Her impliserer (4):

(7) (Ax)(xêΔ;2. –> xêr) som sammen med (5) og (6) impliserer antesedenten i (2). Derfor (8) xêr. Men r var et vilkårlig element derfor:
(Ar)(Q(Δ;2UΔ;1,r) –> xêr), mao. xêk(Δ;1UΔ;2). **Q.E.D.**

**Teorem 20** k(ø) = ø

**Bevis:** Det er trivielt at ø Inkl k(ø). Anta (1) zêk(ø) for vilkårlig z. I lys av definisjonen av k har man da (Ak)(Q(ø,k) –> zêk). Siden øêV impliserer dette at Q(ø,ø) –> zêø. Nå har man at

ø Inkl ø
(Ax)(Ay)(x,yêø –> K(x,y)êø)
(Ax)(Ay)(xêø –> (L(y,x) –> yêø))

siden alle er tomt sanne. Videre har man, siden konjunksjonen av disse tre setningene impliserer Q(ø,ø), at zêø. Men z var et vilkårlig objekt som oppfylte (1). Det følger at k(ø) Inkl ø. Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

**Teorem 21** (Induksjonsteorem)

Mg(x:F(x))êV & (Ax)(xêΔ –> F(x)) &
(Ay)(Ax)(F(x) & F(y) –> F(K(x,y)) &
(Ax)(Ay)(F(x) & L(y,x) –> F(y)). –> (Ax)(xêk(Δ) –> F(x)).

**Bevis:** Anta (1) xêk(Δ). I lys av Definisjon 3.3 innbærer dette at:

(2) (Ar)(Q(Δ,r) –> xêr)

Dette og den første forutsetningen impliserer:

Q(Δ,Mg(z:F(z))) –> xêMg(z: F(z)). Derfor:

(3) Q(Δ,Mg(z:F(z))) –> F(x)

Ekspanderes Q(Δ,Mg(z: F(z))) ved hjelp av Definisjon 3.4 får man et uttrykk som er implisert av de fire siste forutsetningene i satsen. Ved hjelp av (3) følger derfor F(x). **Q.E.D.**

**Teorem 22** Mg(x: LogS(x))êV & (Ax)(xêΔ–> LogS(x)) –> (Ay)(yêk(Δ) –> LogS(y))

**Bevis:** Denne satsen følger ved induksjon. Man har at

(Ax)(Ay)(LogS(x) & LogS(y) –> LogS(K(x,y))) og
(Ax)(Ay)(LogS(x) & L(y,x) –> LogS(y))

er utledbare fra U1 – U5. Ved hjelp av dette og Teorem 2.1 følger satsen. **Q.E.D.**

**Teorem 23** (Ax)(xêΔ –> LogS(x)) –> k°(Δ) = ø

**Bevis:** Vi har åpebart fra aksiomene i teorien at Mg(z: LogS(z))êV. Dette, forutsetningen i teoremet og Teorem 22 impliserer (Ay)(yêk(Δ) –> LogS(y)). Dette er ekvivalent med ¬(Ey)(yêk(Δ) & ¬LogS(y)). Fra dette følger så ved hjelp av Definisjon 4.1 at k°(Δ) = ø. **Q.E.D.**

**Teorem 24** ΔêPt(S) & Δ≠ø –> k(Δ)≠ø

**Bevis:** Anta ΔêPt(S) & Δ≠ø. Da har man (Ex)(xêΔ) som ved hjelp av Teorem 1 impliserer (Ex)(xêk(Δ)), mao. k(Δ)≠ø. **Q.E.D.**

**Teorem 25** k°(ø) = ø

**Bevis:** Denne påstanden følger ved hjelp av Teorem 20 og og Definisjon 4.1. **Q.E.D.**

**Teorem 26** $\Delta\neq\emptyset \;\&\; \Delta\hat{e}Pt(S). \rightarrow (Ax)(LogS(x) \rightarrow x\hat{e}k(\Delta))$

**Bevis:** Anta (1) $\Delta\neq\emptyset \;\&\; LogS(x)$. Dette impliserer at det må finnes y slik at (2) $y\hat{e}\Delta$. Anta for vilkårlig r at (3) $Q(\Delta,r)$. I lys av Definisjon 3.2 impliserer dette (4) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow x\hat{e}r) \;\&\; (Ax)(Az)(x\hat{e}r \;\&\; L(z,x). \rightarrow z\hat{e}r)$. Fra (2) og (4) følger (5) $y\hat{e}r$. Men siden LogS(x) har man også $(Aw)L(w,x)$ fordi det følger fra U1 – U5 at $LogS(x) \rightarrow (Aw)L(x,w)$. Det følger derfor at L(x,y). Men fra dette (4) og (5) kan man slutte $x\hat{e}r$. Siden r var et vilkårlig element som oppfylte (3) har man $(Ar)(Q(\Delta,r) \rightarrow x\hat{e}r)$, dvs. i lys av definisjonen av operasjonen k at $x\hat{e}k(\Delta)$. **Q.E.D.**

**Teorem 27** $\Delta;1,\Delta;2\hat{e}Pt(S) \;\&\Delta;1\neq\emptyset \;\&\; \Delta;2\neq\emptyset \rightarrow$
$(k°(\Delta;1) = k°(\Delta;2) \leftrightarrow k(\Delta;1) = k(\Delta;2))$

**Bevis:** Konjunksjonen mot venstre i konsekventen holder uten forbehold i kraft av Definisjon 4.1. Anta (1) $\Delta;1\neq\emptyset \;\&\; \Delta;2\neq\emptyset \;\&\; k°(\Delta;1) = k°(\Delta;2)$. Den siste konjunkten impliserer ved hjelp av Definisjon 4.1:

(2) $(Az)(z\hat{e}k(\Delta;1) \;\&\; \neg LogS(z). \leftrightarrow. z\hat{e}k(\Delta;2) \;\&\neg LogS(z))$

Dette impliserer , noe man lett ser, i sin tur:

(3) $(Az)(\neg LogS(z) \rightarrow (z\hat{e}k(\Delta;1) \rightarrow z\hat{e}k(\Delta;2)))$

Fra (1) følger ved hjelp av Teorem 26 at (4) $(Az)(LogS(z) \rightarrow z\hat{e}k(\Delta;2))$. Fra dette kan man slutte (5) $(Az)(LogS(z) \rightarrow (z\hat{e}k(\Delta;1) \rightarrow z\hat{e}k(\Delta;2)))$. Fra (3) og (5) følger:

(6) $(Az)(z\hat{e}k(\Delta;1) \rightarrow z\hat{e}k(\Delta;2))$ mao. $k(\Delta;1)$ Inkl $k(\Delta;2)$.

Inklusjonen den andre veien bevises helt analogt siden premissene er symmetriske. **Q.E.D.**

**Teorem 28** $(Ax)(x\hat{e}\Delta;2 \rightarrow LogS(x)) \;\&\; \Delta;1\hat{e}Pt(S) \;\&\; \Delta;1=\emptyset \;\&\; \Delta;2\neq\emptyset \rightarrow$
$k°(\Delta;2) = k°(\Delta;1) \;\&\; k(\Delta;2)\neq\emptyset \;\&\; k(\Delta;1)=\emptyset$

**Bevis:** Umiddelbar konsekvens av Teorem 20, Teorem 23, Teorem 24 og Teorem 25. **Q.E.D.**

Fra denne satsen kan man se at det finnes en teori som kun inneholder logiske sannheter og som er ikke-tom. Videre at dersom den tomme mengden regnes som en teori gjelder ikke Teorem 27 om man fjerner forbeholdene $\Delta;1\neq\emptyset \;\&\; \Delta;2\neq\emptyset$. Det er altså mulig å finne moteksempler til:

$k°(\Delta;1) = k°(\Delta;2) \leftrightarrow k(\Delta;1) = k(\Delta;2)$

Likeledes er forbeholdet i Teorem 26 nødvendig. Det er ikke mulig å bevise generelt at (i) $(Ax)(LogS(x) \rightarrow x\hat{e}k(\Delta))$. Setter man nemlig inn "ø" for "Δ" her har man i lys av Teorem 20 at (ii) $(Ax)(LogS(x) \rightarrow x\hat{e}\emptyset)$. Dette impliserer $\neg(Ex)LogS(x)$, dvs. at det ikke finnes noen logiske sannheter. Dette er åpenbart urimelig. Merk at trinnet fra (i) til (ii) strengt tatt forutsetter at $\emptyset\hat{e}V$, ie. Me1.

**Teorem 29** $\Delta\hat{e}Pt(S) \rightarrow k°(k°(\Delta))$ Inkl $k°(\Delta)$

**Bevis:** I lys av Definisjon 4.1 har man umiddelbart at $k°(\Delta)$ Inkl $k(\Delta)$. Dette impliserer ved hjelp av Teorem 9 at $k(k°(\Delta))$ Inkl $k(\Delta)$. Herav har man:

k(k°(Δ))ΩMg(x: ¬LogS(x)) Inkl k(Δ)ΩMg(x: ¬LogS(x)). Fra dette følger så om man igjen benytter seg av Definisjon 4.1: k°(k°(Δ)) Inkl k°(Δ) **Q.E.D.**

**Teorem 30** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Δ;1 Inkl Δ;2 –> k(Δ;1) Inkl k(Δ,2)

**Bevis:** Teorem 1 impliserer Δ;2 Inkl k(Δ;2). Dette sammen med forutsetningene i satsen impliserer Δ;1 Inkl k(Δ;2). Men fra dette og Teorem 9 kan man slutte: k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). **Q.E.D.**

**Teorem 31** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Δ;2 = Δ;1U{x} &LogS(x) & ¬(xêΔ;1) & Δ;1≠ø –>
(Δ;1 SInkl Δ;2 & k(Δ;2) = k(Δ;1))

**Bevis:** Fra den tredje og femte forutsetningen følger ved hjelp av Teorem 26 at (1) xêk(Δ;1). Dette impliserer {x} Inkl k(Δ;1). Ved hjelp av Teorem 1 har man herav {x}UΔ;2 Inkl k(Δ;1)UΔ;1 = k(Δ;1). Dette og Teorem 9 gir en k({x}UΔ;1) Inkl k(Δ;1). Ved hjelp av Teorem 19 har man også k(Δ;1) Inkl k(Δ;1U{x}). Det følger derfor i lys av den andre forutsetningen i teoremet at følgende holder:

k(Δ;1) = k(Δ;1U{x}) = k(Δ;2)

Fra den andre og fjerde forutsetningen i satsen følger også at Δ;1 Inkl Δ;2 og dessuten at (Ex)(¬(xêΔ;1) & xêΔ;2). Herav har man Δ;1 SInkl Δ;2. **Q.E.D.**

Fra Teorem 31 fremgår det åpenbart at man ikke generelt har at

Δ;1 SInkl Δ;2 –> k(Δ;1) SInkl k(Δ;2).

**Teorem 32** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Δ;1≠ø & Δ;2≠ø. –>
(k(Δ;1) SInkl k(Δ;2) <–> k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2))

**Bevis:** Anta (1) k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2) & Δ;2≠ø & xêk(Δ;1) for vilkårlig x. Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): LogS(x). Siden vi forutsetter Δ;2≠ø følger i dette tilfellet vedhjelp av Teorem 26 at xêk(Δ;2).

Tilfelle (ii): Anta ¬LogS(x). Fra dette, Definisjon 4.1 og (1) følger xêk°(Δ1). Da har man igjen ved hjelp av (1) xêk°(Δ;2) Inkl k(Δ;2). I begge tilfelle har man xêk(Δ;2). Siden x var et vilkårlig objekt har vi vist:

(2) Δ;2≠ø –>. k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2) –> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2).

Anta nå (3) k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2). Dette impliserer at det finnes x slik at

(4) xêk°(Δ;2) og

(5) ¬(xêk°(Δ;1))

Her impliserer (4) ved hjelp av Definisjon 4.1:

(6) ¬LogS(x) & xêk(Δ;2).

(5) impliserer xêk(Δ;1) –> LogS(x). Dette og (6) gir en xêk(Δ;2) & ¬(xêk(Δ;1)). Herav (Ex)(xêk(Δ;2) & ¬(xêk(Δ;1))). Det flkger at ¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)). Vi har nå vist: k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2) –> ¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)). Sammen med (2) impliserer dette den ene halvdelen av satsen.

Anta nå (8) Δ;1≠ø & k(Δ;1) SInkl k(Δ;2). Anta videre at x er et vilkårlig element slik at (9) xêk°(Δ;1). Dette impliserer xêk(Δ;1) & ¬LogS(x). Herav følger så ved hjelp av (8) at xêk(Δ;2) & ¬LogS(x) dvs. xêk°(Δ;2). Man har derfor:

(10) k°(Δ;1) Inkl k°(Δ;2).

Men fra den siste konjunkten i (8) følger også at det finnes y slik at

(11) yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;1). Fra (8), (11) og Teorem 26 kan man slutte:
(12) ¬(LogS(y)) (11) og (12) impliserer yêk°(Δ;2). Men fra (11) følger også ¬(yêk°(Δ;1)) siden k°(Δ;1) Inkl k(Δ;1). Derfor har man:
(Ey)(yêk°(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;1))). Herav:
(13) ¬(k°(Δ;2) Inkl k°(Δ;1)). Vi har nå vist
Δ;1≠ø & k(Δ;1) SInkl k(Δ;2). –> k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2)
Dette viser at den andre halvdelen av satsen holder. **Q.E.D.**

Det er forholdsvis lett å finne et moteksempel til:

k(Δ;1) SInkl k(Δ;2) –> k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2)

La Δ;1=ø og anta at Δ;2 bare inneholder logiske sannheter. Da har vi at k(Δ;1) =ø SInkl k(Δ;2) fordi k(Δ;2) er ikke-tom. Men i lys av de teoremene som har blitt bevist har man k°(Δ;1) = ø = k°(Δ;2). Dette strider åpenbart mot k°(Δ;1) SInkl k°(Δ;2).

**Teorem 33** Setn(x) –> k({x}) = Mg(z: L(z,x))

**Bevis:** (a) Vi gir først bevis for inklusjonen mot venstre. Anta (1) L(w,x) og anta for vilkårlig r at Q({x},r). I lys av definisjonen av Q impliserer dette:
(2) (Ay)(yê{x} –> yêr) & (Ay)(Ax)(yêr & L(x,y). –> xêr)
Den første konjunkten impliserer at xêr. Dette, (1) og den andre konjunkten i (2) impliserer åpenbart wêr. Men r var et vilkårlig element der Q({x},r). Derfor:
(Ar)(Q({x},r) –> wêr). Dette sammen med definisjonen av operatoren k impliserer så at wêk({x}).
(b) På grunnlag av U1 – U5 kan man utlede:
(1) (Ax)(Ay)(L(x,w) & L(y,w) –> L(K(x,y),w)) og
(2) L(x,x)
Fra (2) følger (Ay)(y=x –> L(y,x)). Dette er ekvivalent med:
(3) (Ay)(yê{x} –> L(y,x))
Nå kan man også på basis av U1 – U5 utlede:
(4) (Ax)(Ay)( L(x,w) & L(y,x) –> L(y,w))
Nå er det lett å vise at man generelt har at L(x,y) –> Setn(x) & Setn(y). Det følger derfor at Mg(x: L(x,w)) Inkl Mg(z: Setn(z)). Fra dette og ST10 følger
(5) Mg(x: L(x,w))êV
Ved hjelp av Teorem 21, (1), (3), (4) og (5) har man at:
(6) (Aw)(wêk({x}) –> L(w,x)) dvs. k({x}) Inkl Mg(w: L(w,x))
Dette gir en et fullstendig bevis for påstanden. **Q.E.D.**

En mengde kalles for uavhengig, i symboler "Indp(Δ)", om den er ikke-tom og den oppfyller følgende krav: (i) Ingen setning i Δ er noen logisk sannhet. (ii) Ingen negasjon av noen setning i Δ er noen logisk sannhet. (iii) Ingen setning y i Δ er med i konsekvensmengden til noen delmengde av Δ – {y}.

**Definisjon 4.2:** Indp(Δ) <–> (Δ≠ø & (Ax)(xêΔ –> ¬LogS(x)) &
(Ax)(xêΔ –>¬LogS(N(x)) &
(Ay)(yêΔ –> (Az)(z Inkl (Δ–{y}) –> ¬(yêk(z)))))

**Teorem 34** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Indp(Δ;2) & Δ;1 SInkl Δ;2. –>
(Ax)(xêΔ;1 –> ¬(xêk(Δ;2–Δ;1)))

**Bevis:** Anta (1) xêΔ;1. Fra den tredje forutsetningen i satsen følger (2) xêΔ;2. Dette og den andre forutsetningen impliserer i lys av Definisjon 4.2:

(3) (Az)(z Inkl (Δ;2 – {x}) –> ¬(xêk(z)))

Fra (1) følger (4) {x} Inkl Δ;1. Dette impliserer i sin tur (5) c(Δ;1) Inkl c({x}). Fra dette kan man slutte: (6) (Δ;2–Δ;1) Inkl (Δ;2–{x}). Siden Δ;2,Δ;1êPt(S) følger det at (Δ;2–Δ;1)êPt(S). I lys av aksiom ST10 følger da: (Δ;2–Δ;1)êV. Fra dette, (3) og (6) har man: ¬(xêk(Δ;2 – Δ;1)). Men x var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (1). Det følger at man har: (Ax)(xêΔ;1 –> ¬(xêk(Δ;2 – Δ;1))). **Q.E.D.**

**Teorem 35** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Indp(Δ;2) & Δ;1 SInkl Δ;2. & xê(Δ;2–Δ;1) –>
¬(xêk(Δ;1) & k(Δ;1) SInkl k(Δ;2)

**Bevis:** Anta (0) xê(Δ;2 – Δ;1). Da har man (1) xêΔ;2 og (2) ¬(xêΔ;1). Fra (1), den andre forutsetningen og definisjonen av "Indp" følger:

(3) (Az)(z Inkl (Δ;2 –{x}) –> ¬(xêk(z)))

Fra (2) har man {x} Inkl –(Δ;1) og herav, i lys av den tredje forutsetningen at

(4) Δ;1= Δ;1ΩΔ;2 Inkl (Δ;2 – {x}) Siden Δ;1êPt(S) følger at Δ;1êV. Fra (3) og (4) kan man derfor slutte ¬(xêk(Δ;1)). Men x var et vilkårlig objekt slik at (0) holdt. Det følger derfor at

(+) (Ax)(xê(Δ;2–Δ:1) –> ¬(xêk(Δ;1)))

Fra den tredje forutsetningen følger ved hjelp av Teorem 30:

(5) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)

Men fra denne tredje forutsetningen følger også at det finnes y slik at:

(6) yêΔ;2 & ¬(yêΔ;1)

Fra (6) har man yê(Δ;2–Δ;1), som sammen med (+) gir en:

(7) ¬(yêk(Δ;1)). Men fra (6) følger ved hjelp av Teorem 1 at yêk(Δ;2). Dette sammen med (7) impliserer (Ey)(yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;1))). Herav ¬(k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)). Fra dette og (5) kan man så slutte k(Δ;1) SInkl k(Δ;2). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

**Teorem 36** Setn(x) & ΔêPt(S) &¬LogS(N(x)) &
¬(xêK(Δ)) & (Aw)(wêΔ –> ¬L(w,x)) &
Indp(Δ). –> Indp(ΔU{x})

**Bevis:** Fra den sjette forutsetningen i satsen følger i lys av Definisjon 4.2 at

(1) (Ax)(xêΔ –> ¬LogS(N(x))) & (Ax)(xêΔ –> ¬LogS(x))

og (2) Δ≠ø Siden {x}≠ø er et teorem har man fra dette og (2) at

(3) ΔU{x} ≠ø

Fra (1) følger (Ay)(yêΔ –> ¬LogS(N(y))). Den tredje forutsetningen i teoremet impliserer også åpenbart at (Ay)(y=x –> ¬LogS(N(y))). Fra disse to forholdene kan man slutte:

(4) (Ay)(yêΔU{x} –> ¬LogS(N(y)))

Anta nå for vilkårlig z at (i) zêΔU{x}. Da har man (ii) zêΔ v z=x. Om z=x følger i lys av

den fjerde forutsetningen at ¬(zêk(Δ)). Fra (2) og Teorem 26 har man (Ax)(LogS(x) –> xêk(Δ)). Derfor må vi i dette tilfellet ha at ¬LogS(z). Har man på den annen side zêΔ følger ved hjelp av den siste konjunkten i (1) at ¬LogS(z). I begge tilfelle har man ¬LogS(z). Derfor:

(5) (Az)(zêΔU{x} –> ¬LogS(z))

Fra den sjette forutsetningen og Definisjon 4.2 følger:

(6) (Aw)(wêΔ –> (Az)(z Inkl(Δ–{w}) –> ¬(wêk(z))))

(A) Anta w er et vilkårlig objekt og at

(7) wêΔU{x} & w≠x. Det følger da at wêΔ og fra dette og (6) har man:

(8) (Az)(z Inkl(Δ–{w}) –> ¬(wêk(z)))

La q være et vilkårlig objekt og anta:

(9) q Inkl ((ΔU{x}) – {w}). Fra (9) følger siden:

((ΔU{x}) –{w}) = (ΔΩ –{w}) U({x} Ω –{w})

Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): q Inkl (ΔΩ –{w}). Da følger ved hjelp av (8) at ¬(wêk(q))

Tilfelle (b): q Inkl ({x}Ω –{w}). I lys av (7) har man da at {x} Inkl –{w} og derfor at {x}Ω –{w} = {x}. Følgelig må man ha q Inkl {x}. Er q=ø har man ved hjelp av Teorem 20 k(q)=ø og derfor ¬(wêk(q)). Er på den annen side q≠ø må man ha, siden q Inkl {x}, at q={x}. Men siden man har wêΔ i lys av (7) følger ved hjelp av den femte forutsetningen i satsen at ¬L(w,x). Benyttes Teorem 33 impliserer dette ¬(wêk({x})) og derfor, siden q={x} at ¬(wêk(q)).

I begge undertilfellene har man altså ¬(wêk(q)). Men q var et vilkårlig objekt som oppfylte (9). Det følger at: (Aq)(q Inkl ((ΔU{x}) – {w}) –> ¬(wêk(q))).

Nå var videre w et vilkårlig objekt slik at (7) holdt. Derfor:

(11) (Aw)(wêΔU{x} & w≠x –> (Aq)(q Inkl ((ΔU{x}) – {w}) –> ¬(wêk(q))))

(B) Anta nå for vilkårlige w,q at

(12) wê(ΔU{x}) & w=x & q Inkl ((ΔU{x}) – {w})

Fra de to siste konjunktene i (12) følger q Inkl (ΔΩ –{x}) Inkl Δ. Ved hjelp av Teorem 30 følger herav: k(q) Inkl k(Δ). Men etter den fjerde forutsetningen har vi fra dette ¬(xêk(q)). Fra dette og (12) følger da ¬(wêk(q)). Siden w,x var vilkårlige objekter kan man derfor slutte:

(13) (Aw)(wê(ΔU{x}) & w=x –>
(Aq)(q Inkl ((ΔU{x}) – {w}) –> ¬(wêk(q))))

Fra (11) og (13) har man:

(14) (Aw)(wê(ΔU{x}) –>
(Aq)(q Inkl ((ΔU{x}) – {w}) –> ¬(wêk(q))))

Fra (3), (4), (5) og (14) kan man så i lys av definisjonen av "Indp" slutte at Indp(ΔU{x}). Dette er hva vi ønsker. **Q.E.D.**

**Teorem 37** x,yêS & L(x,y) –> k({x}) Inkl k({y})

**Bevis:** Anta L(x,y) & wêk({x}). Ved hjelp av Teorem 33 følger fra dette at L(x,y) & L(w,x). Ved hjelp av U1 – U5 er det mulig å utlede:

(Ax)(Ay)(Aw)(L(x,y) & L(w,x) –> L(w,y))

Det følger derfor at man har L(w,y). Men fra dette og Teorem 33 følger i sin tur at man har wêk({y}). **Q.E.D.**

**Teorem 38** x,yêS –>. Ekv(x,y) –> k({x}) = k({y})

**Bevis:** Man benytter seg av Teorem 37. **Q.E.D.**

**Teorem 39** x,yêS & k({x}) = k({y}) –> Ekv(x,y)

**Bevis:** Fra forutsetningene i denne satsen følger :
(Aw)(wêk({x}) <–> wêk({y})). Ved hjelp av Teorem 33 kan man herav slutte: (Aw)(L(w,x) <–> L(w,y)). Fra dette følger i sin tur:
(1) L(x,x) <–> L(x,y) & L(y,y) <–> L(y,x)
På basis av U1 – U5 kan man imidlertid utlede L(x,x) & L(y,y). Dette og (1) impliserer L(x,y)&L(y,x). I lys av Definisjon 3.8 har man da Ekv(x,y). **Q.E.D.**

**Teorem 40** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Indp(Δ;2) & Δ;1≠ø & Δ;1 SInkl Δ;2. –>
(Ex)(xêk(Δ;2) & ¬(xêk(Δ;1)) & ¬(xêk(Δ;2–Δ;1)))

**Bevis:** Fra den fjerde forutsetningen i satsen følger at det finnes y slik at
(1) ¬(yêΔ;1) & yêΔ;2
Fra den tredje forutsetningen følger at for noe z har man:
(2) zêΔ;1
(2) og den fjerde forutsetningen impliserer zêΔ;2 som sammen med den siste konjunkten i (1) og Teorem 2 gir som resultat (3) K(z,y)êk(Δ;2). Anta for reduktio ad absurdum at (4) K(z,y)êk(Δ;1). Siden man kan utlede fra U1 –U5 at L(y,K(y,z)) følger fra (3), (4) og Teorem 6 at yêk(Δ;1). Men dette er umulig i lys av (1) og den andre forutsetningen. Det følger derfor at:
(5) ¬(K(z,y)êk(Δ;1))
Anta for reduktio ad absurdum at (6) K(z,y)êk(Δ;2–Δ;1). Da har man siden L(z,K(z,y)) at (7) zêk(Δ;2–Δ;1). Men fra (2) og forutsetningene følger da ved hjelp av Teorem 34 at ¬(zêk(Δ;2–Δ;1). Derfor må man ha
(8) ¬(K(z,y)êk(Δ;2 – Δ;1))
Fra (5), (7) og (8) følger konsekventen i satsen. **Q.E.D.**

**Teorem 41** Δ;1,Δ;2êPt(S) &Indep(Δ;2) & Δ;1≠ø & Δ;1 SInkl Δ;2 –>
k(Δ;1)U k(Δ;2–Δ;1) SInkl k(Δ;2)

**Bevis:** Fra forutsetningene i satsen og Teorem 40 følger:
(1) (Ex)(xêk(Δ;2) & ¬(xêk(Δ;1)) & ¬(xêk(Δ;2–Δ;1)))
Dette innebærer: (Ex)(xêk(Δ;2) & ¬(xê(k(Δ;1)U k(Δ;2–Δ;1))). I sin tur impliserer dette:
(2) ¬(k(Δ;2) Inkl (k(Δ;1)Uk(Δ;2–Δ;1))
Fra den fjerde forutsetningen følger Δ;1 Inkl Δ;2 & (Δ;2–Δ;1) Inkl Δ;2. Ved hjelp av Teorem 30 impliserer dette:
(3) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2) & k(Δ;2–Δ;1) Inkl k(Δ;2)
Fra (2) og (3) følger så satsen. **Q.E.D.**

Det er lett å vise at den følgende sats holder:

**Lemma 1** (Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ) & zêΔ. –> {z} SInkl Δ

**Bevis:** Beviset overlates til leseren som øvelse. **Q.E.D.**

**Lemma 2** ΔêPt(S) & wêΔ & LogS(w) & (Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ) –>
Δ Inkl k(Δ– {w})

**Bevis:** Anta for vilkårlig y at (1) yêΔ. Vi skiller mellom to tilfelle: (a) y=w. Da har man ved hjelp av (1) at wêΔ. Dette, den fjerde forutsetningen og Lemma 1 gir oss {w} SInkl Δ. Fra dette kan man slutte (Δ–{w})≠ø, noe som sammen med den tredje forutsetningen og Teorem 26 impliserer wê(k(Δ–{w}) siden man lett kan vise at man har (Δ–{w})êV. (b) y≠w. Dette og (1) impliserer yê(Δ–{w}) som ved hjelp av Teorem 1 innebærer at yêk(Δ–{w}).

I begge tilfelle har man at yêk(Δ–{w}). Men y var et vilkårlig objekt, derfor: Δ Inkl k(Δ– {w}). **Q.E.D.**

**Lemma 3** ΔêPt(S) & (At)(t≠ø & t SInkl Δ –> k(t)Uk(Δ–t) SInkl k(Δ)) &
(Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ). –> (Aw)(wêΔ –> ¬LogS(w))

**Bevis:** Anta det finnes w slik at (1) wêΔ & LogS(w). Det er åpenbart tilstrekkelig å vise at denne antagelsen leder til en motsigelse. Fra (1) følger
(2) (Δ–{w}) Inkl Δ som ved hjelp av Teorem 30 impliserer
(3) k(Δ– {w}) Inkl k(Δ).
Men fra (1), den tredje forutsetningen og Lemma 2 har man
(4) Δ Inkl k(Δ–{w}) som ved hjelp av Teorem 9 gir en:
(5) k(Δ) Inkl k(Δ–{w}).
(3) og (5) impliserer åpenbart:
(6) k(Δ) = k(Δ–{w}). Nå har man {w}≠ø. Videre følger fra (1) ved hjelp av Lemma 1 og den tredje forutsetningen at {w} SInkl Δ. Disse to forholdene og den første forutsetningen impliserer, siden {w}êV at
(7) k(Δ–{w}) SInkl Δ. Dette strider åpenbart mot (6) og gir oss derfor en motsigelse. Det kan derfor ikke finnes noe w som oppyller kravet (1). **Q.E.D.**

**Lemma 4** ΔêPt(S) & (At)(t≠ø & t SInkl Δ –> k(t)Uk(Δ–t) SInkl k(Δ)) &
(Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ). –> (Aw)(wêΔ –> ¬LogS(N(w)))

**Bevis:** Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w slik at
(1) wêΔ & LogS(N(w))
Fra den siste konjunkten i (1) kan man utlede på grunnlag av aksiomene U1 – U5 at (Ay)L(y,w). Dette impliserer (y)(yêΔ –> L(y,w)), som i sin tur impliserer ved hjelp av Teorem 33:
(2) (Ay)(yêΔ –> yêk({w})). Herav:
(3) Δ Inkl k({w})
Ved hjelp Teorem 9 kan man slutte fra (3) at (4) k(Δ) Inkl k({w}). Fra (1) følger også {w} Inkl Δ. Fra dette kan man slutte (5) k({w}) Inkl k(Δ) ved hjelp av Teorem 30. (4) og (5) viser at (6) k(Δ)= k({w}).

Fra (1), den tredje forutsetningen i satsen og Lemma 1 følger

(7) {w} SInkl Δ

Siden {w}≠ø følger fra dette, (7), den andre forutsetningen og det forhold at {w}êV at k(({w}) SInkl k(Δ). Men dette strider åpenbart mot (6) og gir oss derfor en motsigelse. **Q.E.D.**

**Lemma 5** ΔêPt(S) & (At)(t≠ø & t SInkl Δ –> k(t)Uk(Δ–t) SInkl k(Δ)) &
(Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ). –>
(Aw)(wêΔ –> (At)(t Inkl (Δ–{w}) –> ¬(wêk(t)))

**Bevis:** Anta at det finnes w,t slik at:

(1) wêΔ & t Inkl(Δ–{w}) & wêk(t)

Fra (1) følger ved hjelp av Teorem 30:

(2) k(Δ–{w}) Inkl k(Δ)

Fra (1) følger imidlertid også ved hjelp av Teorem 30:

(3) k(t) Inkl k(Δ–{w})

Dette og den siste konjunkten i (1) impliserer (4) wêk(Δ–{w})

Anta nå for vilkårlig y at (i) yêΔ.

Tilfelle (a): y≠w. Da har man yê(Δ–{w}) og derfor ved hjelp av Teorem 1 at yêk(Δ–{w}).

Tilfelle (b): y=w. Da har man trivielt yêk(Δ–{w}) ved hjelp av (4).

I begge tilfellene har man yêk(Δ–{w}). Men y var et vilkårlig objekt. Derfor:

(Ay)(yêΔ –> yêk(Δ–{w}), dvs. (5) Δ Inkl k(Δ–{w}). Ved hjelp av Teorem 9 impliserer (5) at:

(6) k(Δ) Inkl k(Δ–{w}). Dette og (2) gir en:

(7) k(Δ) = k(Δ–{w})

Fra (1), den tredje forutsetningen og Lemma 1 følger (8) {w} SInkl Δ. Men dette og den andre forutsetningen impliserer, siden {w}≠ø & {w}êV at:

(9) k(Δ–{w}) SInkl Δ.

Dette strider åpenbart mot (7). Det kan derfor ikke finnes w,t slik at (1) holder.
**Q.E.D.**

**Teorem 42** ΔêPt(S) & (At)(t≠ø & t SInkl Δ –> k(t)Uk(Δ–t) SInkl k(Δ)) &
(Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ) –> Indp(Δ)

**Bevis:** Satsen følger fra Lemma 3 – 4, definisjonen av "Indp" og det forhold at (Ex)(Ey) (x≠y & x,yêΔ) impliserer Δ≠ø. **Q.E.D.**

**Teorem 43** ΔêPt(S) & (Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ) –>.
Indp(Δ) <–> (At)(t≠ø & t SInkl Δ &ΔêPt(S) –> k(t)Uk(Δ–t) SInkl k(Δ))

**Bevis:** Fra Teorem 41 følger umiddelbart
ΔêPt(S) & Indp(Δ) –> (At)(t≠ø & t SInkl Δ &ΔêPt(S). –>
k(t) U k(Δ–t) SInkl k(Δ))

Fra dette og Teorem 42 følger så satsen. **Q.E.D.**

I forbindelse med Definisjon 4.2 kan det være verdt å studere et meget nært beslektet begrep "uavhengig setningsmengde". Dette er definert på den den følgende måte:

**Definisjon 4.3** Indp;2(Δ) <–> (Δ≠ø & (Ax)(xêΔ –> ¬LogS(x)) &
(Ax)(xêΔ –>¬LogS(N(x)) &
(Ay)(yêΔ –> (Az)(z Inkl (Δ–{y}) –>. ¬(yêk(z)) &¬(N(y)êk(z)))))

Studerer man denne definisjonen skulle det være åpenbart at man har
(+) ΔêPt(S) &Indp;2(Δ) –> Indp(Δ)
Vi ønsker nå å undersøke sammenhengen mellom disse to lett avvikende uavhengighetsbegrepene. Holder f.eks. det omvendte av (+)? For dette formål defineres "Cons(Δ)", "Δ er en konsistent setningsmengde" ved den følgende definisjon:

**Definisjon 4.4** Cons(Δ) <–> ¬(Ex)(K(x,N(x))êk(Δ))

Man ser at en setningsmengde Δ er konsistent i henhold til denne definisjonen hvis og bare hvis man har at det ikke finnes noen setning x slik at K(x,N(x)) er med i konsekvensmengden til Δ.

**Teorem 44** (a) ΔêPt(S) & Indp(Δ) & Cons(Δ) –> Indp;2(Δ)
(b) ΔêPt(S) & Cons(Δ) –> (Indp(Δ) <–> Indp;2(Δ))

**Bevis:** (a) Det eneste vi trenger å vise er at siste konjunkt i definiens i Definisjon 4.3 er implisert av forutsetningene. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes y,z der:
(1) yêΔ & z Inkl (Δ–{y}) & N(y)êk(z)
Fra den andre konjunkten i (1) følger z Inkl Δ. Ved hjelp av Teorem 30 følger da k(z) Inkl k(Δ). Sammen med den siste konjunkten i (1) impliserer dette (2) N(y)êk(Δ).
Men fra den første konjunkten i (1) har man i lys av Teorem 1 (3) yêk(Δ). (2), (3) samt Teorem 4 impliserer K(y,N(y))êk(Δ). Herav (Ey)(K(y,N(y))êk(Δ)) som sammen med definisjonen av Cons strider mot den tredje forutsetningen.
(b) Denne delen av satsen følger fra den første delen samt formelen (+) som ble nevnt ovenfor. **Q.E.D.**

**Teorem 45** x;1,...,x;nêS –>. (Ay)(yêk({x;1,...,x;n}) <–> L(y, K(x;1,...,x;n)))

Her står "K(x1,...,x;n)" for "K(x;1,(K(.....K(x;n-1,x;n).....)))", dvs. konjunksjonen av de ymse x;1,...,x;n i denne rekkefølgen og med parantesene satt mot høyre. (Strengt tatt må K(x;1,...,x;n) defineres induktivt på en helt opplagt måte) Beviset for denne satsen er i det vesentlige temmelig trivielt og vi benytter oss av de samme setningene som figurerte i beviset for Teorem 33.

**Bevis:** (a) Vi har
(1) (Ay)(y=x;1 –> L(y,K(x;1,....,x;n)) &....& (Ay)(y=x;n –>L(y,K(x;1,...,x;n)))
Dette er fordi vi på basis av U1 – U5 kan utlede L(x;j,K(x;1,...,x;n)) for j=1,...,n.
Fra (1) følger:
(Ay)(y=x;1 v....v y=x;n. –> L(y, K(x;1,...,x;n))). Dette innebærer at:
(2) (Ay)(yê{x;1,....,x;n} –> L(y,K(x;1,...,x;n)))
Videre kan man utlede på grunnlag av aksiomene U1 – U5:
(3) (Ax)(Ay)(L(y,K(x;1,....,x;n)) & L(x,K(x;1,....,x;n)) –>

L(K(x,y),K(x;1,....,x;n)))

Ytterligere kan man bevise på basis av de nevnte aksiomer:

(4) (Ax)(Ay)(L(y,K(x;1,....,x;n)) & L(x,y). –> L(x,K(x;1,...,x;n)))

Siden Mg(y: L(y,K(x;1,...,x;n)))êV følger fra (2), (3), (4) og Teorem 21 at

(Ay)(yêk({x;1,...,x;n}) –> L(y, K(x;1,...,x;n))

(b) Anta på den annen side (0) L(y,K(x;1,...,x;n)) og anta (1) Q({x;1,...,x;n},t) for vilkårlig t. Da har man ved hjelp av definisjonen av Q at (Az)(zê{x;1,...,x;n} –> zêt), med andre ord at (2) x;1,...,x;nêt. Men man kan også fra (1) slutte: (3) (Ax)(Ay)(x,yêt –> K(x,y)êt) som sammen med (2) gir en:

(3.1) K(x;1,...,x;n)êt. Fra (1) og definisjonen av Q følger imidlertid

(4) (Ax)(Ay)(xêt & L(y,x) –> yêt)

Dette, (3.1) og (0) gir en yêt. Men t var et vilkårlig objekt. Vi har derfor vist:

(At)(Q({x;1,...,x;n},t) –> yêt). Dette innebærer yêk({x;1,...,x;n}) i lys av definisjonen av k. **Q.E.D.**

Vi skal nå vise at Indp;2(Δ) impliserer Cons(Δ). For dette formål trenger vi den følgende sats som vi ikke skal gi et bevis for akkurat her:

**Påstand** Er ΔêPt(S) og xêk(Δ) finnes det et endelig antall distinkte elementer y;1,...,y;nêΔ der n≥1 slik at L(x,K(y;1,...,y;n)).

**Teorem 46** ΔêPt(S) –>. (Indp;2(Δ) <–> (Indp(Δ) & Cons(Δ)))

**Bevis:** Anta (1) Indp;2(Δ). Fra dette og definisjonen av Indp;2 følger:

(2) (Aw)(wêΔ –> (Az)(z Inkl (Δ–{w}) –> (¬(wêk(z)) & ¬(N(w)êk(z)))))

Anta for reduktio ad absurdum at (3) ¬Cons(Δ). Fra dette og Definisjon 4.4 følger at det finnes y slik at (4) K(y,N(y))êk(Δ). Fra dette og påstanden ovenfor følger det at det finnes distinkte x;1,...,x;nêΔ (n≥1) slik at:

(5) L(K(y,N(y)), K(x;1,....,x;n))

Ved hjelp av aksiomene U1 – U5 kan man fra (5) utlede:

L(N(K(x;1,....,x;n)), N(K(y,N(y))))

noe som igjen gir oss, siden N(K(y,N(y))) er en logisk sannhet, at N(K(x;1,...,x;n)) er en logisk sannhet. Men N(K(x;1,...,x;n)) er ekvivalent med C(K(x;1,...,x;(n-1)),N(x;n)). Man har derfor LogS(C(K(x;1,...,x;(n-1)),N(x;n))) og følgelig at L(N(x;n), K(;1,...,x;(n–1))). I lys av Teorem 45 gir dette en:

(6) N(x;n)êk({x;1,....,x;(n–1)})

Men vi har at x;nêΔ og at {x;1,....,x;(n–1)} Inkl (Δ–{x;n}) siden x;1,...,x;n er distinkte. Derfor har man i lys av (2) og det at {x;1,...,x;n}êV at ¬(N(x;n)êk({x;1,...,x;(n–1)})). Dette strider imidlertid mot (6). Det kan derfor ikke være slik at (3) holder og man må derfor ha Cons(Δ). Fra dette resultat og Teorem 44 følger satsen. **Q.E.D.**

Vi skal avslutte dette avsnittet med å vise en del satser som er av en mer marginal interesse.

**Teorem 47** ΔêPt(S) –> k(Δ) = k(UN(Mg(k({y}): yêΔ)))

**Bevis:** (a) Anta wêUN(Mg(k({y}): yêΔ)) for vilkårlig w. Vi har i så fall wêUN(Mg(z: (Ey)(z=k({y}) &yêΔ))). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av UN at: (Et)(wêt & (Ey)(t= k({y}) & yêΔ)). Dette er i lys av velkjente kvantifikajonsteoretiske og

identitetsteoretiske setninger ekvivalent med (Ey)(wêk({y}) & {y} Inkl Δ). Siden {y} Inkl Δ impliserer k({y}) Inkl k(Δ) ved hjelp av Teorem 30 har man (Ey)(wêk({y}) & k({y}) Inkl k(Δ)). Dette impliserer åpenbart wêk(Δ). Men w var et vilkårlig objekt. Derfor har vi vist:

UN(Mg(k({y}): yêΔ)) Inkl k(Δ). Ved hjelp av Teorem 9 impliserer dette siden UN(Mg(k({y}): yêΔ))êV at k(UN(Mg(k({y}): yêΔ))) Inkl k(Δ).

(b) Anta på den annen side at (0) wêk(Δ) og anta for vilkårlig r at

(1) Q(UN(Mg(k({y}): yêΔ)),r)

Fra definisjonen av Q følger herav:

(2) (Az)(zêUN(Mg(k({y}): yêΔ)) –> zêr)

(3) (Az)(Ax)(z,xêr –> K(z,x)êr)

(4) (Az)(Ax)(zêr & L(x,z). –> xêr)

Fra (2) følger i lys av definisjonen av UN:

(5) (Az)((Ey)(zêk({y}) &yêΔ) –> zêr)

Ved hjelp av enkel predikatlogikk ser man at dette er ekvivalent med:

(6) (Az)(Ay)(zêk(y) –> (yêΔ –> zêr))

Ved hjelp av Teorem 33 kan man da utlede:

(7) (Az)(Ay)(L(z,y) –> (yêΔ–>zêr)) Men fra dette: (Az)(L(z,z) –>(zêΔ–> zêr). Siden vi har (Az)L(z,z) følger: (8) (Az)(zêΔ –> zêr). Fra (3), (4), (8) og definisjonen av Q følger (9) Q(Δ,r). Men fra (0) og definisjonen av k har man (As)(Q(Δ,s) –> wês). Det følger da ved hjelp av (9) at (10) wêr. Men r var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (1). Derfor har man:

(11) (Ar)(Q(UN(Mg(k({y}): yêΔ)),r) –> wêr)

Dette innebærer i lys av definisjonen av k at wêk(UN(Mg(k({y}): yêΔ))) **Q.E.D.**

**Teorem 48** ΔêPt(S) –> k(UN(Mg(k(z): z SInkl Δ))) Inkl k(Δ)

**Bevis:** Anta for vilkårlig x at xê UN(Mg(k(z): z SInkl Δ)). Da har man (Ew)(xêw & wêMg(k(z): z SInkl Δ)). Herav følger:

(Ew)(xêw & (Ez)(w=k(z) & z SInkl Δ)) Dette impliserer i sin tur (Ez)(xêk(z) & z SInkl Δ). Siden z SInkl Δ i lys av Teorem 30 impliserer k(z) Inkl k(Δ) har vi xêk(Δ). Men x var et vilkårlig objekt, derfor:

UN(Mg(k(z): z SInkl Δ)) Inkl k(Δ)

Fra Teorem 9 og det forhold at UN(Mg(k(z): z SInkl Δ))êV følger satsen. **Q.E.D.**

**Teorem 49** ΔêPt(S) & (Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ) –>
k(Δ) Inkl k(UN(Mg(k(z): z SInkl Δ)))

**Bevis:** Anta (1) xêk(Δ) og anta for vilkårlig r at:

(2) Q(UN(Mg(k(z): z SInkl Δ)),r)

Fra (2) og definisjonen av predikatet Q følger:

(3) (Aw)(wêUN(Mg(k(z): z SInkl Δ)) –> wêr)

(4) (Aw)(Av)(w,vêr –> K(w,v)êr)

(5) (Aw)(Av)(vêr & L(w,v). –> wêr)

Fra (3) følger: (Aw)((Ez)(wêk(z) & z SInkl Δ) –> wêr). Dette impliserer:

(6) (Az)(z SInkl Δ –> (Aw)(wêk(z) –> wêr))

Anta for vilkårlig y at yêΔ. Da har man ved hjelp av den andre forutsetningen og Lemma 1 at {y} SInkl Δ. Siden {y}êV gir dette og (6) at

(Aw)(wêk({y}) –> wêr). Ved hjelp av Teorem 33 kan man fra dette slutte at (Aw)(L(w,y) –> wêr). Men siden man på basis av U1 – U5 kan utlede L(y,y) har man yêr. Men y var et vilkårlig element i Δ. Derfor:

(7) (Ay)(yêΔ –> yêr)

Fra (1) følger ved hjelp av definisjonen av operasjonen k:

(8) (As)(Q(Δ,s) –> xês)

Fra (4), (5), (7) og definisjonen av Q følger så Q(Δ,r) som sammen med (8) gir xêr. Men r var et vilkårlig objekt som oppfylte (2). Det følger at

(Ar)(Q(UN(Mg(k(z): z SInkl Δ)),r) –> xêr), dvs.

xêk(UN(Mg(k(z): z SInkl Δ))) **Q.E.D.**

**Teorem 50** Δ;1,Δ;2êPt(S) & (Ax)(xêΔ;2 –> (Ey)(yêΔ;1 & L(x,y))) –> k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)

**Bevis:** Anta for vilkårlige z,r:

(1) zêk(Δ;2) & Q(Δ;1,r)

I lys av definisjonen av operasjonen k innebærer dette:

(2) (As)(Q(Δ;2,s) –> zês) & Q(Δ;1,r)

Fra den siste konjunkten i (2) følger ved hjelp av Definisjon 3.2:

(3) (Ax)(xêΔ;1 –> xêr)

(4) (Ax)(Ay)(x,yêr –> K(x,y)êr)

(5) (Ax)(Ay)(xêr & L(y,x). –> yêr)

Anta for vilkårlig w at wêΔ;2. Fra den andre forutsetningen i satsen følger da at det finnes y der man har:

(6) yêΔ;1 & L(w,y)

Fra (3), (5) og (6) følger wêr. Men w var et vilkårlig objekt, derfor har man:

(7) (Aw)(wêΔ;2 –> wêr)

Fra (4), (5), (7) og Definisjon 3.2 kan man da slutte Q(Δ;2,r) som sammen med (2) gir en zêr. Men r var et vilkårlig objekt som oppfylte (1). Det følger at

(8) (Ar)(zêk(Δ;2) & Q(Δ;1,r) –> zêr) Dette er er ekvivalent med:

(9) zêk(Δ;2) –> (Ar)(Q(Δ;1,r) –> zêr). I lys av Definisjon 3.3 og det forhold at z var vilkårlig valgt følger k(Δ;2) Inkl k(Δ;1). **Q.E.D.**

## §5 Om prøvbare teorier og utledning av observasjonssetninger.

Det kan virke plausibelt å hevde at den idé at alt i en empirisk teori skal være nødvendig for deduksjonen av observasjonssetninger –, altså den antagelse at en teori Δ ikke skal inneholde overflødige antagelser som ikke har noen funksjon når det gjelder deduksjonen av observasjonssetninger, er en forholdsvis viktig idé. Det virker nærliggende å stille opp dette som et krav til en empirisk teori. Gitt to teorier Δ;1 og Δ;2 som inneholder de samme observasjonssetningene i sitt konsekvenssystem, men der alt i Δ;1 er nødvendig for utledningen av observasjonssetningene mens det samme ikke er tilfelle for Δ;2, kunne man intuitivt tro at den første var å foretrekke under ellers like omstendigheter. Det er en del av hensikten med de følgende bemerkninger å drøfte muligheten av å gi en brukbar definisjon av uttrykket

(a) "Δ er en teori der alle setningene er nødvendige for deduksjon av

observasjonssetninger".

Vi er også i denne sammenheng interessert i å drøfte mulige definisjoner av konstruksjonen:

(b) "Δ er en teori der alle setningene er nødvendige for deduksjon av setninger i klassen X".

I det følgende mener vi med en teori det samme som en mengde med setninger. En teori er deduktivt lukket om konsekvenssystemet til teorien er inkludert i teorien.

Før vi går videre gjør vi oppmerksom på at vi bruker "Obs(x)" som forkortelse for "x er en observasjonssetning". Vi utvider språket til TDM med dette predikatet som et nytt ikke-logisk predikat. Teorien utvides også med de følgende aksiomer:

OB1 $Obs(x) \rightarrow Setn(x)$

**Definisjon 5.1:** $O = Mg(x: Obs(x))$

**Definisjon 5.2:** $N(\Delta) \leftrightarrow (Ey)(y \hat{e} O \,\&\, y \hat{e} k(\Delta) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\}))))$

Man kunne foreslå den følgende betingelse som definiens i en definisjon av uttrykk (a) ovenfor:

(i) $(Ey)(y \hat{e} O \,\&\, y \hat{e} k(\Delta) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\}))))$

Hva (i) sier er at det finnes minst en observasjonssetning y som er med i konsekvenssystemet til Δ, men som ikke er med i konsekvensmengden til noen av de teorier man får når man fjerner et hvilket som helst element fra Δ. Sier man at en setning er utledbar, eller deduserbar, fra Δ hvis og bare hvis den er med i konsekvensmengden til Δ innebærer (i) at det finnes en observasjons-setning som er dedusibel fra Δ, men som ikke er dedusibel fra noen teori som man får fra Δ ved å fjerne en setning i denne teorien.

Det virker ikke helt urimelig å hevde at (i) er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for å kunne si at alt i teorien Δ er nødvendig for utledningen av en eller annen observasjonssetning. Siden ens intuisjoner imidlertid kan være mer eller mindre svevende på dette punkt er det imidlertid ingen grunn til å insistere på dette. (i) er et mulig forslag. Det kan finnes andre. Man kunne f.eks. istedet for (i) betrakte den følgende betingelse:

(ii) $(Ey)(y \hat{e} O \,\&\, y \hat{e} k(\Delta) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\}))) \,\&\, (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(Ez)(z \hat{e} O \,\&\, z \hat{e} k(\Delta - \{x\}))))$

(ii) er selvfølgelig ikke utledbar fra (i), men man ser at det omvendte holder trivielt. Det er lett å se at (ii) ikke kan utledes fra (i). Det følgende moteksempel viser dette: Anta at O1 og O2 er to observasjonssetninger. Betrakt teorien Δ som kun innholder de to setningene O1 og O1–>O2. Anta at O1 og O2 er logisk sett uavhengige av hverandre og at O1 ikke er utledbar fra O1–>O2. Det virker rimelig å tro at det skulle finnes et slikt par av observasjonssetninger. Gitt disse forutsetningene er det lett å se at Δ oppfyller kravet (i). Den oppfyller imidlertid ikke kravet (ii).

I forbindelse med konstruksjonen (b) kunne man i analogi med (i) muligens foreslå:

(iii) $(Ey)(y\hat{e}X \& y\hat{e}k(\Delta) \& (Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg(y\hat{e}k(\Delta - \{x\}))))$

som definiens i en definisjon, eller det kunne muligens være mer fruktbart å betrakte:

(iv) $(Ey)(y\hat{e}X \& y\hat{e}k(\Delta) \& (Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg(y\hat{e}k(\Delta - \{x\}))) \&$
$(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg(Ez)(z\hat{e}X \& z\hat{e}k(\Delta - \{x\})))$

I forbindelse med (ii) og (iv) bør det bemerkes at den tredje komponenten strengt tatt er overflødig i lys av den siste konjunkten.

I det følgende vil "N(Δ)" bli brukt som forkortelse for betingelsen (i). I denne forbinelse gir vi den følgende formelle definisjon:

**Definisjon 5.3** $N(\Delta) \leftrightarrow (Ey)(y\hat{e}O \& y\hat{e}k(\Delta) \& (Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg(y\hat{e}k(\Delta - \{x\}))))$

I det følgende skal vi bevise enkelte satser som kan kaste noe lys over egenskapene til dette predikatet N. La oss kalle to teorier Δ;1 og Δ;2 for ekvi-valente hvis og bare hvis k(Δ;1) = k(Δ;2). Det er mulig under visse forholdsvis rimelige forutsetninger å vise at det kan finnes to teorier Δ;1, Δ;2 som er ekvivalente, men der man likevel har N(Δ;1) &¬N(Δ;2). Det følgende teorem sier ikke nøyaktig dette, men er likevel av relevans i denne forbindelse.

**Teorem 51** $\Delta;1,\Delta;2\hat{e}Pt(S) \& N(\Delta;1) \& \Delta;2 \neq \emptyset \&$
$\Delta;1 \Omega \Delta;2 = \emptyset \& (Ax)(x\hat{e}\Delta;2 \rightarrow LogS(x)). \rightarrow$
$\neg N(\Delta;1 U \Delta;2) \& k(\Delta;1) = k(\Delta;1 U \Delta;2)$

**Bevis:** I lys av forutsetningene har man ved hjelp av Teorem 19:

(1) $k(\Delta;1)$ Inkl $k(\Delta;1U\Delta;2)$

Vi må vise at inklusjonen den andre veien holder under forutsetningene i satsen. I lys av Teorem 1 har man $\Delta;1$ Inkl $k(\Delta;1)$. Fra den andre forutsetningen og definisjonen av N følger $(Ey)(y\hat{e}k(\Delta;1)$, dvs. at $k(\Delta;1) \neq \emptyset$. Dette, den femte forutsetningen og Teorem 26 impliserer $\Delta;2$ Inkl $k(\Delta;1)$. Derfor har vi
$\Delta;2U\Delta;1$ Inkl $k(\Delta;1)$. Tar man i betraktning Teorem 9 impliserer dette:
$k(\Delta;2U\Delta;1)$ Inkl $k(\Delta;1)$. Herav har man så ved hjelp av (1):

(2) $k(\Delta;1) = k(\Delta;1U\Delta;2)$

Anta nå for vilkårlig y at:

(3) $y\hat{e}O \& y\hat{e}k(\Delta;1U\Delta;2)$

Fra (3) og (2) følger (4) $y\hat{e}k(\Delta;1)$. Fra den tredje og den femte forutsetningen i satsen følger det at det finnes w slik at (5) $LogS(w) \& w\hat{e}\Delta;2$. Dette impliserer (6) $w\hat{e}\Delta;1U\Delta;2$. Det er fra dette og den fjerde forutsetningen klart at

$\Delta;1$ Inkl $((\Delta;1 \cup \Delta;2) - \{w\})$

Dette impliserer i sin tur ved hjelp av Teorem 30 at:

$k(\Delta;1)$ Inkl $k((\Delta;1 \cup \Delta;2) - \{w\})$. Herav har vi, sammen med (4) og (6):
$(Ew)(w\hat{e}(\Delta;1U\Delta;2) \& y\hat{e}k((\Delta;1 \cup \Delta;2) - \{w\})$. Men y var et vilkårlig objekt som oppfylte (2). Derfor:

$(Ay)(y\hat{e}O \& y\hat{e}k(\Delta;1U\Delta;2) \rightarrow (Ew)(w\hat{e}(\Delta;1U\Delta;2) \& y\hat{e}k((\Delta;1 \cup \Delta;2) - \{w\}))$

Dette er ekvivalent med:

$\neg(Ey)(y\hat{e}O \& y\hat{e}k(\Delta;1U\Delta;2) \& (Aw)(w\hat{e}(\Delta;1U\Delta;2) \rightarrow \neg(y\hat{e}k((\Delta;1 \cup \Delta;2) - \{w\})))$

I lys av definisjonen av N innebærer dette $\neg N(\Delta;1U\Delta;2)$. Dette viser at satsen holder.
**Q.E.D.**

La nå O1 være en observasjonsetning og w en logisk sannhet. Sett Δ;1={O1} og Δ;2 = {w}. Siden ingen observasjonsetninger er logiske sannheter har man Δ;1ΩΔ;2=ø. Likeledes ser man lett at N(Δ;1). Imidlertid følger ved hjelp av Teorem 51 at ¬N(Δ;1UΔ;2) selvom k(Δ;1)= k(Δ;1UΔ;2). Dette viser at det er mulig at to teorier kan være logisk ekvivalente selvom den ene oppfyller betingelsen N, mens den andre ikke gjør det.

Det empiriske innholdet til en setningsmengde Δ, i symboler "E(Δ)" er definert ved:

**Definisjon 5.4:** E(Δ) = Mg(x: xêO & xêk(Δ))

Med en *prøvbar teori* Δ forstår vi her en teori Δ som er konsistent og der det empiriske innholdet til teorien er ikke-tomt, mao. en teori som oppfyller de følgende to krav: (i) Cons(Δ) og (ii) E(Δ)≠ø. (En inkonsistent teori har det neppe noen hensikt å kalle prøvbar siden absolutt alle obervasjonsetningene er med i dens konsekvenssystem)

Vi sier at Δ' er en empirisk utvidelse av Δ der Δ, Δ' er setningsmengder hvis og bare hvis Δ SInkl Δ' og E(Δ) SInkl E(Δ'). Uttrykket "EU(Δ',Δ)" brukes som forkortelse for "Δ' er en empirisk utvidelse av Δ". Dette er formelt definert slik:

**Definisjon 5.5:** EU(Δ',Δ) <–> (Δ SInkl Δ' & E(Δ) SInkl E(Δ'))

Det vi nå skal gjøre er å vise noen enkle teoremer som kan kaste noe lys over forholdet mellom dette begrepet og begrepet om teorier der alle setningene i teorien er nødvendige for utledningen av observasjonssetninger.

**Teorem 52** Δ;1,Δ;2êPt(S) &N(Δ;2) & Δ;1 SInkl Δ;2. –> EU(Δ;2,Δ;1)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger at det finnes y der:
(1) yêk(Δ;2) & yêO & (Ax)(xêΔ;2 –> ¬(yêk(Δ;2–{x})))
Fra den tredje forutsetningen følger at det finnes z slik at
(2) zêΔ;2 & ¬(zêΔ;1) & (Ax)(xêΔ;1 –> xêΔ;2)
Fra (2) har man (3) Δ;1 Inkl (Δ;2 –{z}) og derfor ved hjelp av Teorem 30:
(4) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2 – {z})
Fra (1) og (2) følger ¬(yêk(Δ;2–{z})). Ved hjelp av (4) impliserer dette ¬(yêk(Δ;1)). Dette og (1) gir en:
(5) (Ey)(yêk(Δ;2) & yêO & ¬(yêk(Δ;1))) Fra den tredje forutsetningen og Teorem 30 har man (6) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). I lys av definisjonen av E gitt ovenfor har man fra (5) og (6) at E(Δ;1) SInkl E(Δ;2). Dette, den tredje forutsetningen og Definisjon 5.5 gir EU(Δ;2,Δ;1). **Q.E.D.**

I forbindelse med dette teoremet er det interessant å se på en betingelse som er noe svakere enn "N(Δ)". Det dreier seg om betingelsen "N;2(Δ)" definert ved den følgende definisjon:

**Definisjon 5.6:** N;2(Δ) <–> (Ax)(xêΔ –> (Ey)(yêO & yêk(Δ) & ¬(yêk(Δ–{x}))))

Det skulle være enkelt å se at N(Δ) impliserer N;2(Δ). Beviset for dette overlates til leseren. Man kan nå bevise:

**Teorem 53** Δ;1,Δ;2êPt(S) & N;2(Δ;2) & Δ;1 SInkl Δ;2 –> EU(Δ;2,Δ;1)

**Bevis:** Fra den tredje forutsetningen følger at det finnes z der

(1) ¬(zêΔ;1) & zêΔ;2 & (Ay)(yêΔ;1 –> yêΔ;2)

Dette og den andre forutsetningen i satsen impliserer ved hjelp av definisjonen av N;2 at det finnes y hvor man har:

(2) yêO & yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;2–{z}))

Fra (1) har man (3) Δ;1 Inkl (Δ;2–{z}). Fra dette og Teorem 30 kan man slutte k(Δ;1) Inkl k(Δ;2–{z}) som sammen med (2) gir en:

(4) (Ey)(yêO & yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;1)))

Fra den tredje forutsetningen følger også ved hjelp av Teorem 30:

(5) k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). Dette og (4) impliserer i lys av definisjonen av "E(Δ)" at E(Δ;1) SInkl E(Δ;2). Herav kan man ved hjelp av Definisjon 5.5 og den tredje forutsetningen i satsen slutte at EU(Δ;2,Δ;1). **Q.E.D.**

**Teorem 54** ΔêPt(S) –> (N;2(Δ) <–> (At)(t SInkl Δ –> EU(Δ,t)))

**Bevis:** Kondisjonalen mot høyre følger umiddelbart fra Teorem 53. La oss gi et bevis for kondisjonalen mot venstre. Anta (At)(t SInkl Δ –> EU(Δ,t)). Dette vil si at (At)(t SInkl Δ –> (t SInkl Δ & E(t) SInkl E(Δ))). I sin tur er dette ekvivalent med:

(1) (At)(t SInkl Δ –> (Ex)(xêk(Δ) & xêO & ¬(xêk(t))))

Vi må vise at N;2(Δ). Anta derfor for vilkårlig y at (2) yêΔ. Da har man (3) (Δ–{y}) SInkl Δ. Det følger fra eksistensaksiomene i teorien at (Δ–{y})êV. Derfor har man fra (1) og (3) at:

(4) (Ex)(xêk(Δ) & xêO & ¬(xêk(Δ – {y})))

Men y var vilkårlig. Derfor har vi vist:

(Ay)(yêΔ –> (Ex)(xêk(Δ) & xêO & ¬(xêk(Δ – {y})))) Dette og Definisjon 5.6 impliserer N;2(Δ). **Q.E.D.**

Siden N;2(Δ) er svakere enn N(Δ) skulle det være forholdsvis lett å innse at Teorem 54 ikke gjelder om man for "N;2" setter inn "N".

Vi skal gi bevis for det følgende teorem som viser at vi kunne ha benyttet en annen definisjon av N(Δ):

**Teorem 55**

(a) ΔêPt(S) –> [N(Δ) <–>
(Ey)(yêO & yêk(Δ) & (At)(t SInkl Δ & t≠ø. –> ¬(yêk(Δ–t))))]

(b) ΔêPt(S) –> [N;2(Δ) <–>
(At)(t SInkl Δ –> (Ex)(xêO & xêk(Δ) & ¬(xêk(t))))]

**Bevis:** (a) Anta ΔêPt(S). Vi gir først bevis for kondisjonalen mot høyre. Anta derfor N(Δ). Da følger etter definisjonen av predikatet N at det finnes y der:

(1) yêΔ & yêk(Δ) og

(2) (Ax)(xêΔ –> ¬(yêk(Δ–{x})))

Anta nå for reduktio ad absurdum at følgende holder:

(3) (Ay)(yêO & yêk(Δ). –> (Et)(t SInkl Δ & t≠ø & yêk(Δ– t)))

(1) og (3) impliserer at det finnes t der:

(4) t SInkl Δ & t≠ø & yêk(Δ– t)

Fra t≠ø følger det selvfølgelig at det finnes w der (5) wêt. Fra (2), (4) og (5) har man:

(6) ¬(yêk(Δ–{w}))

Fra (5) har man videre at {w} Inkl t som gir en (Δ–t) Inkl (Δ–{w}). Dette impliserer i sin tur ved hjelp av Teorem 30 at k(Δ–t) Inkl k(Δ–{w}). Sammen med (4) gir dette en yêk(Δ–{w}) som åpenbart strider mot (6). Det følger at (3) er gal om man forutsetter N(Δ) og at man derfor har:

(7) ¬(Ay)(yêO & yêk(Δ). –> (Et)(t SInkl Δ & t≠ø & yêk(Δ– t)))

Dette er ekvivalent med:

(8) (Ey)(yêO & yêk(Δ) & (At)(t SInkl Δ & t≠ø. –> ¬(yêk(Δ–t))))

La oss nå vise at kondisjonalen mot venstre holder. Anta derfor i tillegg til ΔêPt(S) at det finnes y slik at:

(1) yêO & yêk(Δ) & (At)(t SInkl Δ & t≠ø. –> ¬(yêk(Δ–t)))

Anta x er et vilkårlig objekt der (2) xêΔ. Da følger (3) {x} Inkl Δ. Om {x}=Δ har man at Δ–{x} =ø og derfor ved hjelp av Teorem 20 at k(Δ–{x}) = k(ø) = ø. Men ¬(yêø). Derfor ¬(yêk(Δ–{x})). Er {x} SInkl Δ, har man siden {x}êV og {x}≠ø ved hjelp av (1) at ¬(yêk(Δ–{x})). I begge tilfelle har man ¬(yêk(Δ–{x})). Nå var x et vilkårlig element som oppfylte kravet (2). Det følger derfor at:

(4) (Ax)(xêΔ –> ¬(yêk(Δ–{x})). Sammen med de to første konjunktene i (1) og definisjonen av N impliserer dette N(Δ). Dette viser at (a) holder.

(b) Beviset for dette punktet er analogt med beviset for punkt (a). Vi overlater her detaljene til leseren. **Q.E.D.**

Vi definerte ovenfor uttrykket "N(Δ)" ved Definisjon 5.3. I forbindelse med dette predikatet kan det være av interesse å betrakte en relatert, sterkere betingelse, nemlig N*(Δ) definert ved:

**Definisjon 5.7:** N*(Δ) <–> (Ey)(yêO & yêk(Δ) &
(Ax)(xêΔ –>. ¬(yêk(Δ–{x})) & ¬(yêk({x}))))

Man kan merke seg at dersom ΔêPt(S) har vi at N*(Δ) åpenbart impliserer N(Δ). Det omvendte holder imidlertid ikke. Dette skulle gå frem av følgende moteksempel. La Δ={a} der a er en observasjonsetning. Man har da, noe man lett overbeviser seg selv om, at N(Δ). Vi har imidlertid ikke N*(Δ) fordi N*(Δ) i dette tilfellet fordi (+) aêO & aêk({a}}. Gitt at N*(Δ) ville vi også kunne slutte
(Ax)(xêΔ –>. ¬(yêk(Δ–{x})) & ¬(yêk({x}))) og herav ved hjelp av (+), siden Δ={a} at ¬(aêk({a})). Men dette siste strider åpenbart mot (+).

Det kan også være av interesse å betrakte en annen, litt sterkere variant av betingelsen "N(Δ)". Vi har i tankene den følgende betingelse "N;0(Δ)" som er definert slik:

**Definisjon 5.8:** N;0(Δ) <–> (Ey)(yêO & yêk(Δ) &
(Ax)(xêΔ –> ¬(Ez)(zêO & zêk(Δ–{x}))))

N;0(Δ) impliserer N(Δ) gitt at Δ er en setningsmengde. Dette skulle egentlig ikke være så vanskelig å se. At implikasjonen den andre veien ikke holder kan vises ved å studere teorien Δ={a;1,a;2} der det forutsettes at a;1 og a;2 er observasjonssetninger som er uavhengige av hverandre.

Hvordan er nå forholdet mellom N*(Δ) og N;0(Δ). Vi kan vise at den siste

betingelsen ikke impliserer den første. Igjen kan teorien Δ={a}, der a er en observasjonssetning, brukes som moteksempel. Men heller ikke implikasjonen den andre veien holder.

Ovenfor definerte vi betingelsen N;2(Δ). På samme måte som N er relatert til N* definert ved Definisjon 5.7 er N;2 relatert til N;2* definert ved:

**Definisjon 5.9** N;2*(Δ) <–> (Ax)(xêΔ –> (Ey)(yêO & yêk(Δ) & ¬(yêk(Δ–{x}) & ¬(yêk({x}))))

N;2*(Δ) er sterkere enn N;2(Δ) (gitt ΔêPt(S)). Dette skulle være lett å se. At både N;2(Δ) og N;2*(Δ) er svakere enn N(Δ) og N*(Δ) skulle det heller ikke være vanskelig å innse. At N;2(Δ) ikke impliserer N;2*(Δ) skulle det også være mulig å innse om man, som ovenfor, betrakter teorien Δ={a} der a er en observasjonssetning. I dette tilfelle innebærer N;2(Δ) at N;2({a}) som i lys av Definisjon 5.6 er ekvivalent med:

(Ax)(xê{a} –> (Ey)(yêO & yêk({a}) & ¬(yêk({a}–{x})))

Dette er ekvivalent med (Ey)(yêO & yêk({a}) & ¬(yêk(ø))) som åpenbart er sant om a er en observasjonssetning. Men man ser lett i dette tilfellet at man ikke kan ha N;2*(Δ).

I det følgende skal vi bruke N**(Δ) som forkortelse for høyre side i konsekventen i Teorem 55a. Tilsvarende bruker vi N;2**(Δ) som forkortelse for høyre side i konsekventen i Teorem 55b. Som man ser fra Teorem 55 har man da at N(Δ) <–>N**(Δ) om Δ er en setningsmengde. Tilsvarende har man at N;2(Δ) er ekvivalent med N;2**(Δ). Vi skal også tillate oss å bruke uttrykket "N;0*(Δ)" som forkortelse for "N;0(Δ) & (Ex)(Ey)(x,yêΔ & x≠y)". Disse stipulasjonene kan sammenfattes i den følgende definisjon:

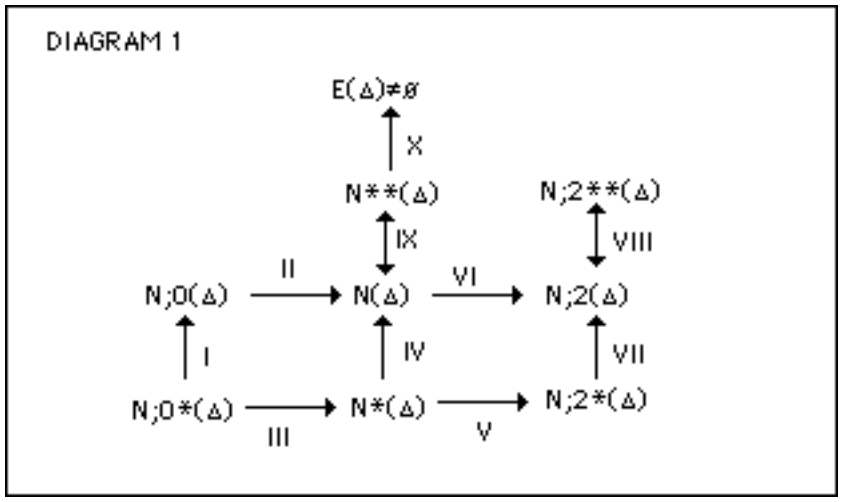
**Definisjon 5.10:**

(a) N**(Δ) <–> (Ey)(yêO & yêk(Δ) & (At)(t SInkl Δ & t≠ø. –> ¬(yêk(Δ–t))))

(b) N;2**(Δ) <–> (At)(t SInkl Δ –> (Ex)(xêO & xêk(Δ) & ¬(xêk(t))))

(c) N;0*(Δ) <–> N;0(Δ) & (Ex)(Ey)(x,yêΔ & x≠y)

De resultatene vi har nevnt ovenfor i forbindelse med Definisjon 5.3 – 5.10 kan delvis sammenfattes i det følgende diagram:



I dette diagrammet betyr "–>" det samme som impliserer. Noen spredte kommentarer til de enkelte implikajonene i diagrammet: Implikasjon I er triviell. Dette gjelder også implikasjon X som skulle være opplagt i lys av definisjonen av E, Definisjon 5.4, Teorem 55 og definisjonen av N, Definisjon 5.3. Implikasjonen VIII og IX er vist i Teorem 55. Kort sagt er de fleste av implikasjonene godtgjort ovenfor. Den eneste implikasjonen som er av en mindre opplagt natur og som vi ikke har argumentert til fordel for så langt er III.
At denne holder skulle imidlertid være klart i lys av det følgende teorem:

**Teorem 56** $\Delta \hat{e} Pt(S) \rightarrow (N;0^*(\Delta) \rightarrow N^*(\Delta))$

**Bevis:** Anta $N;0^*(\Delta)$ og at $\Delta \hat{e} Pt(S)$. Ved hjep av Definisjon 5.10 følger fra dette:

(1) $N;0(\Delta) \& (Ex)(Ey)(x,y \hat{e} \Delta \& x \neq y)$

Den første konjunkten impliserer i lys av Definisjon 5.8 at det finnes y der:

(2) $y \hat{e} O \& y \hat{e} k(\Delta) \& (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow \neg(Ez)(z \hat{e} O \& z \hat{e} k(\Delta - \{x\})))$

Vi må vise at $N^*(\Delta)$. Anta derfor for vilkårlig x at (+) $x \hat{e} \Delta$. Dette og (2) impliserer at (3) $\neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\}))$. Fra (+) følger $\{x\}$ Inkl $\Delta$, som sammen med (1) og Lemma 1 gir en $\{x\}$ SInkl $\Delta$. Dette innebærer at det finnes w slik at:

(4) $w \hat{e} \Delta \& \neg(w \hat{e} \{x\})$

Fra dette og (2) følger:

(5) $(Az)(z \hat{e} O \rightarrow \neg(z \hat{e} k(\Delta - \{w\})))$

I sin tur kan man ved hjelp av (2) slutte fra dette:

(6) $\neg(y \hat{e} k(\Delta - \{w\}))$

Fra (+) og (4) følger $\{x\}$ Inkl $(\Delta - \{w\})$. Ved hjelp av Teorem 30 har man da $k(\{x\})$ Inkl $k(\Delta - \{w\})$ som sammen med (6) gir en: $\neg(y \hat{e} k(\{x\}))$. Nå var x et vilkårlig objekt i $\Delta$. Vi har derfor vist:

$(Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow (\neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\})) \& \neg(y \hat{e} k(\{x\}))))$.

Fra dette, (2) og definisjonen av N*, dvs. Definisjon 5.7, kan man slutte $N^*(\Delta)$. **Q.E.D.**

Den svakeste av betingelsene på diagrammet ovenfor, nemlig $N;2(\Delta)$, impliserer ikke isolert $Indp(\Delta)$, dvs. at $\Delta$ er en uavhengig teori i svak betydning. Men man kan vise at denne betingelsen impliserer $Indp(\Delta)$ om man legger til som en premiss at $\Delta$ inneholder minst to elementer. Det følgende teorem uttrykker dette i det "$2m(\Delta)$" brukes som forkortelse for "$(Ex)(Ey)(x \neq y \& x,y \hat{e} \Delta)$":

**Teorem 57** $\Delta \hat{e} Pt(S) \& N;2(\Delta) \& 2m(\Delta). \rightarrow Indp(\Delta)$

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen i denne satsen følger ved hjelp av Definisjon 5.6:

(1) $(Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow (Ey)(y \hat{e} O \& y \hat{e} k(\Delta) \& \neg(y \hat{e} k(\Delta - \{x\})))$

Fra den tredje forutsetningen i satsen har vi:

(2) $(Ex)(Ey)(x \neq y \& x,y \hat{e} \Delta)$

(a) Anta for reduktio ad absurdum at det finnes w slik at (i) $LogS(w) \& w \hat{e} \Delta$ . Fra (+) og (2) følger ved hjelp av Lemma 2 at (ii) $\Delta$ Inkl $k(\Delta - \{w\})$. Fra dette og Teorem 9 har man (iii) $k(\Delta)$ Inkl $k(\Delta - \{w\})$. Men man har selvfølgelig $(\Delta - \{w\})$ Inkl $\Delta$, og derfor om man benytter Teorem 30 at $k(\Delta - \{w\})$ Inkl $k(\Delta)$. Dette og (iii) gir en (iv) $k(\Delta) = k(\Delta - \{w\})$. Fra (i) og (1) følger:

$(Ey)( y \hat{e} k(\Delta) \& \neg(y \hat{e} k(\Delta - \{w\}))$

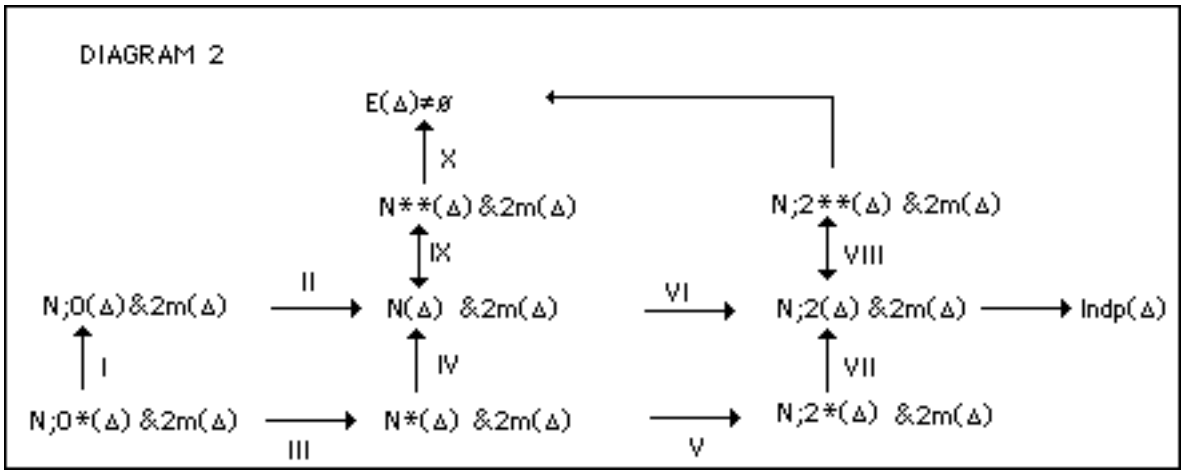
Sammen med (iv) impliserer dette klart en motsigelse. Det følger at det ikke kan finnes noe w som oppfyller kravet (i). Vi har derfor:

(A) (Aw)(wêΔ –> ¬LogS(w))

(b) Anta mot formodning at det finnes w der (i) LogS(N(w)) & wêΔ. Fra den siste konjunkten her, (2) og Lemma 1 følger {w} SInkl Δ. Dette innebærer at det finnes z der (ii) zêΔ & z≠w. Fra dette og (i) kan man slutte wê(Δ–{z}) som ved hjelp av Teorem 1 gir: (iii) wêk(Δ–{z}). Siden LogS(N(w)) har man at
(Ay)(Setn(y) –> L(y,w)). Dette, (iii) og Teorem 6 gir en
(Ay)(Setn(y) –> yêk(Δ–{z})). Siden ΔêPt(S) har man derfor Δ Inkl k(Δ–{z}) og følgelig ved hjelp av Teorem 9 at k(Δ) Inkl k(Δ–{z}). Men inklusjonen den andre veien er det også åpenbart at holder. Derfor: (iv) k(Δ) = k(Δ–{z}).
Fra (1) og (ii) følger (Ey)( yêk(Δ) & ¬(yêk(Δ–{x})) som åpenbart er absurd i lys av (iv). Det kan følgelig ikke finnes w slik at (i) og man må ha:
(B) (Aw)(wêΔ –> ¬LogS(N(w)))

(c) Anta det finnes z,x slik at:
(i) xêΔ & z Inkl (Δ–{x}) & xêk(z)
Fra den andre konjunkten her og Teorem 30 følger k(z) Inkl k(Δ–{x}) og derfor i lys av den siste konjunkten i (i) at (ii) xêk(Δ–{x}). Man kan vise at
(*) k(Δ) Inkl k(Δ–{x})
For la y være et vilkårlig element i Δ. Da har man enten at y=x, og i så fall har man yêk(Δ–{x}) ved hjelp av (ii), eller så er y≠x og derfor yê(Δ–{x}) Inkl k(Δ–{x}). Det følger at Δ Inkl k(Δ–{x}) og følgelig har man ved hjelp av Teorem 9 at (*) holder. Men det skulle være klart at vi også har k(Δ–{x}) Inkl k(Δ). Dette og (*) gir en: (iii) k(Δ) = k(Δ–{x}). Fra (i) og (1) følger: (Ey)(yêk(Δ) & ¬(yêk(Δ–{x})). Dette og (iii) gir oss åpenbart en motsigelse.
Det kan altså ikke finnes x,z slik at (i) holder. Derfor har man:
(Ax)(xêΔ –> (Az)(z Inkl (Δ–{x}) –> ¬(xêk(z))))
Sammen med (A), (B) og Definisjonen av Indp følger herav Indp(Δ). **Q.E.D.**

Føyer man betingelsen "2m(Δ)" som forkorter "(Ex)(Ey)(x≠y & x,yêΔ)" til alle betingelsene som er tatt med i Diagram 1 får man et nytt, helt tilsvarende, diagram der alle implikasjonene av opplagte grunner fremdeles holder. I tillegg kan man også føye til implikasjonen som er bevist i Teorem 57. Diagrammet ser slik ut:




Vi avslutter denne paragrafen med noen mer spredte bemerkninger angående den åpne setningen:

(a) "Δ er en teori der alle setningene er nødvendige for deduksjon av observasjonssetninger".

Denne betraktet vi i begynnelsen av dette avsnittet. Konstruksjonen kan vel naturlig nok betraktes som noe vag og flertydig. Man kan tolke den i retning av

(i) "Det finnes i det minste en observasjonssetning som alt i Δ er nødvendig for utledningen av.

Denne åpne setningen kan så i sin tur tolkes i retning av "N(Δ)" eller "N**(Δ)" som vi nå har sett er ekvivalente. Men det er også andre tolkningsmuligheter åpne når det gjelder (a). Det er mulig at man kan tolke den i retning av "N;2(Δ)" eller "N;2*(Δ)". (i) derimot synes ikke å kunne tolkes i noen av disse retningene.

Det er vanskelig å si hvilken sannhetsverdi (a) har om Δ er en teori som det ikke er mulig å utlede noen observajonssetninger fra i det hele tatt. Muligens er det mest rimelig å anse (a) som falsk i et slikt tilfelle. Det samme kan sies i forbindelse med (i).

Det kan også være vanskelig å si noe autorativt om i hvilken betydning (a) blir brukt i det daglige liv. Kanskje uttrykket ikke brukes i "det daglige liv" i det hele tatt. I alle tilfelle er det selvfølgelig intet som tvinger oss til å anse noen av de nevnte betingelser som er oppført i diagrammene og som er presist definert innenfor teoriens rammer som adekvate eksplikasjoner av uttrykket (a). Man kan i prinsippet rett og slett la være å bruke konstruksjonen (a) og bruke noen av de nevnte betingelser i stedet alt ettersom hvilket formål man har.

## §6 Om isomorfi mellom teorier.

Betingelsen k(Δ;1) = k(Δ;2) der Δ;1,Δ;2êPt(S) er for svak og impliserer ikke N(Δ;1)<–>N(Δ;2) eller N;2(Δ;1) <–> N;2(Δ;2), eller noen lignende setning som involverer en eller annen av betingelsene i Diagram 1. Vi kan imidlertid finne en annen betingelse som er tilstrekkelig i dette henseende.

La oss omtale to teorier Δ;1 og Δ;2 som isomorfe om det finnes en korrelasjon z som har Δ;2 som høyre domene og Δ;1 som venstre domene og der billedpunktet til et vilkårlig medlem x i Δ;2 over z, z(x), er ekvivalent med x. Vi skal bruke "Isomorf(Δ,Δ')" som forkortelse for "Δ er isomorf med Δ'" og gir den følgende formelle definisjon:

**Definisjon 6.1:** Isomorf(Δ,Δ') <–> (Ez)(Cor(z) & z"V = Δ & (z;-1)"V = Δ' & (Ax)(xêΔ' –> Ekv(z(x),x)))

Det første vi ønsker å vise her er at isomorfi-relasjonen mellom teorier, slik den er definert ovenfor, er en ekvivalensrelasjon. Dette er forholdsvis enkelt, men vi gir likevel beviset i detalj fordi visse eksistensantagelser er involvert som vi gjerne vil gjøre helt eksplisitte.

**Teorem 6.1:** Anta Δ;1,Δ;2,Δ;3 êPt(S) Da gjelder:

(a) Isomorf(Δ;1,Δ;1)

(b) Isomorf(Δ;1,Δ;2) –> Isomorf(Δ;2,Δ;1)

(c) Isomorf(Δ;1,Δ;2) & Isomorf(Δ;2,Δ;3) –> Isomorf(Δ;1,Δ;3)

**Bevis:** I det følgende betyr "f|a" det samme som " Funksjonen f med domenet begrenset til a".

(a) Vi skal anta at I|Δ;1êV, mao. at identitetsfunksjonen I med domenet begrenset til Δ;1 eksisterer. Siden Func(I) & Func(I;-1) har vi at Func((I|Δ;1);-1) & Func((I|Δ;1). Dette impliserer (1) Cor(I|Δ;1). Siden:

xê(I|Δ;1);-1"V <–> (Ey)(<y,x>êI|Δ;1)
<–> (Ey)(<y,x>ê(IΩ(VXΔ;1)
<–> (Ey)(y=x & xêΔ;1) <–> xêΔ;1 har vi:

(2) (I|Δ;1);-1"V =Δ;1 Likeledes viser man:

(3) (I|Δ;1)"V =Δ;1

Anta nå for vilkårlig x at xêΔ. Dette og (3) impliserer xê(I|Δ;1)"V, dvs. at det finnes y slik at (4) <x,y>êI|Δ;1. Siden Func(I|Δ;1) følger herav x= (I|Δ;1)‘y. Det følger selvfølgelig også at x=y. Siden LogS(E(x,x)) har vi Ekv((I|Δ;1)‘x,x). Men x var et vilkårlig element. Det er derfor blitt bevist at:

(5) (Ax)(xêΔ –> Ekv((I|Δ;1)‘x,x))

Fra (1), (2), (3), (5), eksistensantagelsen og definisjonen av isomorfi følger så det vi ønsker, nemlig: Isomorf(Δ;1,Δ;1).

(b) Anta Isomorf(Δ;1,Δ;2). Fra dette og Definisjon 5.1 følger eksistensen av z med egenskapene:

(1) Cor(z) & z"V = Δ;1 & z;-1"V = Δ;2 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

I det følgende skal vi anta at (Az)(zêV –> z;-1êV). Det følger at (+) z;-1êV. Da har man y= z;-1 for noe y. Fra den første konjunkten i (1) følger da åpenbart:

(2) Cor(y) Men vi har også:

(3) y"V = z;-1"V = Δ;2 og (4) y;-1"V = (z;-1);-1"V = z"V=Δ;1.

Anta for vilkårlig x at (i) xêΔ;1. Da ha man ved hjelp av (1) at xêz"V, dvs. at (ii) <x,w>êz for noe w. Siden Func(z;-1) følger fra (1), og (ii) impliserer <w,x>êz;-1 har vi (iii) w = (z;-1)‘x. Men fra (ii) følger wê(z;-1)"V=Δ;2 (Jmf. (1)) og da har man også ved hjelp av (1) at Ekv(z‘w,w). Dette og (iii) gir
Ekv(z‘((z;-1)‘x), (z;-1)‘x). Dette impliserer i lys av (1) og (2) at Ekv(x,y‘x), dvs. Ekv(y‘x,x). Men x var et vilkårlig element, derfor:

(5) (Ax)(xêΔ;1 –> Ekv(y‘x,x))

Fra (2), (3), (4) og (5) samt definisjonen av isomorfi følger Isomorf(Δ;2,Δ;1).

(c) Anta Isomorf(Δ;1,Δ;2) & Isomorf(Δ;2, Δ;3). Fra det første følger eksistensen av z der man har:

(1) Cor(z) & z"V = Δ;1 & z;-1"V = Δ;2 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

Siden Isomorf(Δ;2, Δ;3) følger også eksistensen av w der:

(2) Cor(w) & w"V = Δ;2 & w;-1"V = Δ;3 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(w‘x,x))

Vi antar (++) (Az)(Aw)(z°wêV). (Er f og g to funksjoner betegner "f°g" sammensetningen av dem) Nå har man:

(3) (z°w)"V = z"(w"V)= z"Δ;2 = z"((z;-1)"V) = z"V = Δ;1 (Jmf. (1) og (2))

På den annen side har man:

(4) ((z°w);-1)"V = ((w;-1)°(z;-1))"V = (w;-1)"((z;-1)"V) = (w;-1)"Δ;2=Δ;3

(Jmf. også her (1) og (2). Verifikasjonen av de relasjonslogiske teoremene som er brukt her overlates til leseren) Anta nå for vilkårlig at xêΔ;3. Da har man xê(w;-1)"V og da xêArg(w) siden Cor(w).[3] Vi har derfor:

[3] Det er opplagt at Cor(w) impliserer Func(w). Teoremet som er benyttet her er

(5) $(z°w)‘x = z‘(w‘x)$ [4]

Men siden $w‘xê\Delta;2 = (z;-1)"V$ [5] følger ved hjelp av den siste konjunkten i (1) at $Ekv(z‘(w‘x), w‘x)$. Siden $xê\Delta;3$ følger så videre ved hjelp av den siste konjunkten i (2) at $Ekv(w‘x,x)$. Fra dette har vi derfor $Ekv(z‘(w‘x), x)$, dvs. i lys av (5) at

(6) $Ekv((z°w)‘x,x)$. Siden x var et vilkårlig element har vi altså vist:

(7) $(Ax)(xê\Delta;3 \rightarrow Ekv((z°w)‘x,x))$

men fra (1) og (2) følger også (8) $Cor(z°w)$ [6]. (3), (4), (7), (8), eksistensantagelsen $(z°w)êV$ og definisjonen av isomorfi impliserer $Isomorf(\Delta;1, \Delta;3)$. **Q.E.D.**

Vi skal nå gi bevis for det følgende teorem. Dette vil bli benyttet senere. Poenget med satsen er derfor ikke umiddelbart innlysende.

**Teorem 58** $\Delta;1,\Delta;2,\Delta;3êPt(S) \& \Delta;1 \text{ Inkl } \Delta;2 \& (\Delta;2–\Delta;1) \text{ Inkl } –\Delta;3 \&$
$Isomorf(\Delta;1,\Delta;3) \rightarrow Isomorf(\Delta;2, (\Delta;2–\Delta;1)U\Delta;3)$

**Bevis:** Fra den fjerde forutsetningen i satsen følger at det finnes z der:

(1) $Cor(z) \& (z;-1)"V = \Delta;3 \& z"V = \Delta;1 \& (Ax)(xê\Delta;3 \rightarrow Ekv(z‘x,x))$

Vi skal anta, som en eksistensantagelse, at $(I|(s–t))Upê V$ for alle s,têPt(S) og relasjoner p. (Dette synes å være en temmelig uskyldig påstand) Fra denne generelle påstanden følger mer spesielt at det finnes noe v slik at:

(2) $v= (I|(\Delta;2–\Delta;1))Uz$

Da har man (3) $z"V\Omega V(I|(\Delta;2–\Delta;1))"V = \Delta;1\Omega(\Delta;2–\Delta;1) = ø$. Nå har man videre fra den tredje forutsetningen i satsen at $(Ax)(xê(\Delta;2–\Delta;1) \rightarrow \neg(xê\Delta;3))$. Dette er ekvivalent med: $\neg(Ex)(xê(\Delta;2–\Delta;1) \& xê\Delta;3)$, mao. $(\Delta;2–\Delta;1)\Omega\Delta;3=ø$. Fra det som så langt er nevnt har vi derfor:

(4) $(z;-1)"V \Omega ((I|(\Delta;2–\Delta;1);-1)"V = \Delta;3\Omega(\Delta;2–\Delta;1) = ø$

Det er klart at Cor(I) og derfor også at $Cor(I|(\Delta;2–\Delta;1)$. Dette, (1), (2), (3) og (4) viser at

(6) $Cor(v)$ [7]

Fra (2) ser man lett at:

(7) $v"V = [(I|(\Delta;2–\Delta;1))Uz]"V$
$= (I|(\Delta;2–\Delta;1))"V \text{ U } z"V$
$= (\Delta;2–\Delta;1)U\Delta;1$
$= (\Delta;2U\Delta;1)\Omega\ (c(\Delta;1)U\Delta;1) = \Delta;2U\Delta;1 = \Delta;2$

i lys av den andre forutsetningen i satsen. Videre har man:

(8) $(v;-1)"v = ((I|(\Delta;2–\Delta;1)Uz);-1"V$
$= (I|(\Delta;2–\Delta;1));-1"V \text{ U } (z;-1)"V$
$= (\Delta;2 –\Delta1) \text{ U } \Delta;3$

(Jmf. (1). Her benyttes også noen enkle relasjonslogiske satser [8])

Anta nå for vilkårlig x at $xê(\Delta;2–\Delta;1)U\Delta;3$. Vi sondrer mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): $xê(\Delta;2–\Delta;1)$. Da har man $xê(I|(\Delta;2–\Delta;1));-1"V$ og siden Cor(v) og v er som

---

Func(:a) <–> (a;-1)"V=Arg(a). Se i denne forbindelse Quine [1], Teorem 10.10.

4 Teoremet som er benyttet her er $xêArg(b) \rightarrow (a°b)‘x = a‘(b‘x)$. Se Quine [1], Teorem 10.18

5 Fra det som tidligere er gitt har man $xê(w;-1)"V$. Derfor, siden Cor(w), $<w‘x,x>êw$, dvs. at $w‘xêw"V=\Delta;2 = (z;-1)"V$.

6 Det er lett å vise at $Cor(z) \& Cor(w) \rightarrow Cor(z°w)$. Dette skjer ved hjelp av setningen $Func(a) \& Func(b) \rightarrow Func(a°b)$ og $(a;-1)°(b;-1) = (a°b);-1$. Igjen kan man konsultere Quine [1], Teorem 10.6, samt definisjonene av "a;-1" og "a°b".

7 Vi har her benyttet oss av satsen:
$Cor(a) \& Cor(b) \& (a;-1)"V\Omega(b;-1)"V=ø \& a"V\Omega\ b"V=ø. \rightarrow Cor(aUb)$

8 Implisitt benyttes her $(aub)"V = a"VUb"V$ og $(aUb);-1"V = a;-1"V \text{ U } b;-1"V$.

angitt ved (2) har man v‘x = (I|(Δ;2–Δ;1))‘x = x. [9] Men Ekv(x,x). Det følger derfor at Ekv(v‘x,x).
Tilfelle (ii): xêΔ;3. Da har man i lys av (1) at xê(z;-1)"V og på samme måte som rett ovenfor kan man da slutte at v‘x = z‘x. Men fra det at xêΔ;3 og (1) følger Ekv(z‘x,x). Siden v‘x=z‘x har vi derfor Ekv(v‘x,x).

I begge tilfelle har vi Ekv(v‘x,x). Siden x var vilkårlig følger at

(9) (Ax)(xê((Δ;2–Δ;1)UΔ;3) –> Ekv(v‘x,x)

Fra (6), (7), (8) og (9) følger så konsekventen i teoremet ved hjelp av definisjonen av isomorfi. **Q.E.D.**

De følgende, nokså enkle satser, har vi også bruk for i noen av bevisene for noen av de satsene som vi ønsker å studere. Vi ser først på:

**Lemma 6.6** Cor(z) & x,yê(z;-1)"V & x≠y . –> z(x)≠z(y)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger eksistensen av w,v der

(1) <w,x>,<v,y>êz.

Dette og den første forutsetningen impliserer

(2) w= z‘x & v = z‘y

Anta nå mot formodning at w=v Da har man fra (1) at <w,x>,<w,y>êz. Dette impliserer <x,w>,<y,w>ê(z;-1). Men fra den første forutsetningen følger Func(z;-1). Vi må derfor ha x=y. Men dette strider mot den tredje forutsetningen. Følgelig w≠v, noe som sammen med (2) gir z(x)≠z(y). **Q.E.D.**

**Lemma 6.7** Cor(z) & yêz"V. –> z((z;-1)(y)) = y

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger (1) <y,w>êz for noe w. Fra den første forutsetningen har man (2) Func(z) & Func(z;-1). (1) impliserer at <w,y>êz;-1. Fra dette og (2) kan man så slutte w = (z;-1)‘y. [10] Men fra (1) og (2) følger også y=z‘w. Man har altså y = z‘((z;-1)‘y). **Q.E.D.**

**Lemma 6.8** Cor(z) & (z;-1)"V = Δ;2 & z"V = Δ;1 &
s Inkl (Δ;1–{q}) & qêΔ;1. –> (z;-1)"s Inkl (Δ;2 –{(z;-1)(q)})

**Bevis:** Fra den fjerde forutsetningen følger her umiddelbart (z;-1)"s Inkl (z;-1)"(Δ;1–{q}). Det eneste vi derfor trenger å vise er at

(1) (z;-1)"(Δ;1–{q}) = (Δ;2 –{(z;-1)(q)})

(a) La x være et vilkårlig objekt der xê(z;-1)"(Δ;1–{q}). Etter definisjonene av de uttrykkene om inngår impliserer dette at det finnes y der:

(2) <x,y>ê(z;-1) & yêΔ;1 & y≠q.

Fra dette, forutetningene og Lemma 6.6 følger:

(3) x= (z;-1)‘y & (z;-1)yê;2 & (z;-1)‘y ≠ (z;-1)‘q. Dette i sin tur innebærer at xêΔ;2 & x≠(z;-1)‘q. Med andre ord: xê(Δ;2 –{(z;-1)‘q}.

(b) Anta på den annen side at xê(Δ;2 –{(z;-1)‘q} for vilkårlig x. Da har man

(i) xêΔ;2 & x≠(z;-1)‘q. Dette og den andre forutsetningen impliserer

(ii) <w,x>êz for noe w. Anta for reduktio ad absurdum at q=w. da har man ved

---

[9] Her benyttes følgende teorem (beviset er såpass enkelt at det overlates til leseren):
Cor(xUy) & zê(y;-1)"V. –> y‘z = (xUy)‘z.

[10] Her benyttes satsen Func(a) & <w,y>êa –> w = a‘y. Fra dette teoremet følger så: Func(a) & yê(a;-1)"V. –> <a‘y,y>êa. Se Quine [1], Teoremene 10.16, 10.14 og 10.10.

hjelp av (ii) at <q,x>êz. Siden vi har Func(z;-1) følger da x= (z;-1)‘q. Men dette strider mot (i). Det følger at (iii) w≠q. Fra (i) – (iii):

(iv) <w,x>êz & wêΔ;1 & w≠q. (Jmf. den tredje forutsetningen i satsen og (ii)).

Men (iv) impliserer åpenbart xê(z;-1)"(Δ;1–{q}).

(a) og (b) gir et fullstendig bevis for påstanden. **Q.E.D.**

**Lemma 6.9** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Cor(z) & (z;-1)"V = Δ;2 & z"V = Δ;1 & <x,y>êz & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z(x),x)). –> k(Δ;2–{y}) = k(Δ;1–{x})

**Bevis:** (a) Anta for vilkårlig w at (i) wê(Δ;2–{y}). Da (ii) wêΔ;2 & w≠y. Fra den tredje forutsetningen og (ii) følger (iii) <q,w>êz for noe q. I lys av den andre forutsetningen har man da q= z‘w. Men wêΔ;2. Derfor har man ved hjelp av den sjette forutsetningen at Ekv(z‘w,w). Det følger at vi må ha Ekv(q,w). Siden wêΔ;2 og y i følge femte forutsetning er med i z;-1"V har vi ved hjelp av (ii), den andre forutsetningen og Lemma 6.6 at (iv) z‘w ≠z‘y. Men på grunnlag av den femte og andre forutsetningen følger x= z‘y. Samler man nå sammen det som har blitt bevist ser man at man må ha q≠x. Men qêΔ;1 følger fra (iii) og den fjerde forutsetningen; derfor qê(Δ;1–{x}). Da har man ved hjelp av Teorem 1 i §4 at qêk(Δ;1–{x}). Men siden Ekv(q,w) følger herav ved hjelp av Teorem 6 i §4 at wêk(Δ;1–{x}). Siden w var et vilkårlig objekt i (Δ;2–{y}) har vi vist at (Δ;2–{y}) Inkl k(Δ;1–{x}). Det følger da ved hjelp av Teorem 9 i §4 at k(Δ;2–{y}) Inkl k(Δ;1–{x}).

(b) Det er også nødvendig å bevise inklusjonen mot venstre i konsekventen i satsen. Anta for vilkårlig w at (i) wê(Δ;1–{x}) Da har man selvfølgelig (ii) wêΔ;1 & w≠x. Etter den fjerde forutsetningen har vi i lys av dette at (iii) <w,v>êz for noe v. (iii) og den andre forutsetningen gir oss

v = (z;-1)w. Siden w≠x og w,xêΔ;1=z"V & Func(z;-1) kan vi benytte Lemma 6.6 og slutte at (z;-1)‘x ≠ (z;-1)‘w. Men y= (z;-1)‘w i lys av den femte og den andre forutsetningen i satsen; derfor har man når man samler sammen det som har blitt bevist at (iv) v≠y. Men fra (iii) følger vê(z;-1)"V=Δ;2. Det følger derfor at vi har vê(Δ;2–{y}) og derfor ved hjelp av Teorem 1 i §3 at vêk(Δ;2–{y}). Men i lys av (iii) har man vê(z;-1)"V=Δ;2. Derfor følger ved hjelp av den sjette forutsetningen at Ekv(z‘v,v). Fra (iii) og det at Func(z) følger w =z‘w, noe som sammen med Ekv(z‘v,v) gir Ekv(w,v). Men vêk(Δ;2–{y}). I lys av Teorem 6 og definisjonen av Ekv har man derfor wêk(Δ;2–{y}). Men w var et vilkårlig objekt i (Δ;1–{x}). Det følger at (Δ;1–{x}) Inkl k(Δ;2–{y}) og derfor, ved hjelp av Teorem 9 i §4 at k(Δ;1–{x}) = k(Δ;2–{y}).

(a) og (b) gir en et fullstendig bevis for påstanden. **Q.E.D.**

**Lemma 6.10** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2). –> k(Δ;1) = k(Δ;2)

**Bevis:** Fra den andre foutsetningen følger at det finnes z der:

(1) Cor(z) & (z;-1)"V =Δ;2 & z"V = Δ;1 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

Anta for vilkårlig x at xêΔ;1. da følger ved hjelp av (1) at xêz"V. Dette innebærer at det finne y slik at (2) <x,y>êz. Siden Cor(z) har vi (3) x=z‘y. På den annen side har vi også yê(z;-1)"V=Δ;2. Noe som impliserer i lys av den siste konjunkten i (1) at Ekv(z‘y,y). Sammen med (3) gir detteen (4) Ekv(x,y). Siden yêΔ;2 følger det ved hjelp av Teorem 1 at yêk(Δ;2). Dette, (4) og Teorem 6 impliserer at xêk(Δ;2). Men x var et vilkårlig element i Δ;1. Vi har derfor at

Δ;1 Inkl k(Δ;2). Ved hjelp av Teorem 9 impliserer dette k(Δ;1) Inkl k(Δ;2). Vi har nå vist:

(7) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2). –> k(Δ;1) Inkl k(Δ;2)

Men siden isomorfirelasjonen er symmetrisk og man har:

(8) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;2,Δ;1). –> k(Δ;2) Inkl k(Δ;1)

ved hjelp av (7) kan man slutte at satsen holder. **Q.E.D.**

Etter utledningen av alle disse hjelpesetningene er målet å gi et bevis for den følgende påstand.

(‡) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) –> (G(Δ;1) <–> G(Δ;2))

hvor "G(Δ)" representerer en av "N"-betingelsene i Diagram1, samt "Indp(Δ)" eller "Indp;2(Δ)". Imidlertid skal vi ikke føre noe detaljert bevis for alle disse betingelsene. Vi innskrenker oss til å bevise følgende:

(i) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) –> (Indp;2(Δ;1) <–> Indp;2(Δ;2))
(ii) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) –> (N(Δ;1) <–> N(Δ;2))
(iii) Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) & N;2(Δ;2). –> N;2(Δ;1)

Når leseren har sett bevisene for disse tre påstandene er det trolig at vedkommende vil føle seg overbevist om at bevismetoden også kan brukes på de resterende påstandene. Verifikasjonen av disse kan da overlates til leseren.

Vi starter med (i):

**Teorem 59** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) & Indp;2(Δ;2). –> Indp;2(Δ;1)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen følger ved hjelp av definisjonen av isomorfi at det finnes noe z der man har:

(0) Cor(z) & (z;-1)"V = Δ;2 & z"V = Δ;1 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

Fra den andre forutsetningen følger ved hjelp av Definisjon 4.3:

(1) (Ax)(xêΔ;2 –> ¬LogS(x) & ¬LogS(N(x))
(2) Δ;2≠ø
(3) (Ay)(yêΔ;2 –> (Az)(z Inkl (Δ;2–{y}) –>. ¬(yêk(z)) &¬(N(y)êk(z)))))

(A) Anta nå mot formodning at det finnes noe y slik at (i) yêΔ;1 & LogS(y). Fra dette og (0) følger at det finnes w slik at (ii) <y,w>êz. Herav har man:
wê(z;-1)"V=Δ;2 og dette sammen med den siste konjunkten i (0) impliserer
(iii) Ekv(z‘w,w). Men siden Cor(z) har man i lys av (ii) at y=z‘w. Dette og (iii) gir Ekv(y,w). I lys av (i) må man derfor ha: (iv) LogS(y). Men siden wêΔ;2 følger i lys av (1) at ¬LogS(w). Dette strider mot (iv). Det følger at det ikke kan finnes y slik at (i) holder. Man har derfor:

(4) (Ay)(yêΔ;1 –> ¬LogS(y))

(B) Anta mot formodning at det finnes y med egenskapene:

(i) yêΔ;1 & Logs(N(y)).

Som under (A) rett ovenfor kan vi da vise at det må finnes w slik at (ii) Ekv(y,w) & wêΔ;2. Men dette gir som ovenfor en motsigelse ved hjelp av (i) og (1) siden LogS(w) følger fra (i) og (ii). Derfor:

(5) (Ay)(yêΔ;1 –> ¬LogS(N(y)))

(C) Fra (0) og (2) følger umiddelbart:

(6) Δ;1≠ø

(D) Anta for reduktio ad absurdum at det finnes q,s der:

(i) qêΔ;1 & s Inkl (Δ;1 –{q}) & qêk(s)

Den første konjunkten i (i) sammen med (0) impliserer at det må finnes w slik at (ii) <q,w>êz. Da er wê(z;-1)"V = Δ;2 (Jmf. (0)). Men dette og den siste konjunkten i (0) impliserer (iii) Ekv(z‘w,w). Siden Cor(z) har man fra (ii) at q=z‘w. Dette sammen med (iii) gir en:

(iv) Ekv(q,w)

Fra (iv) og den siste konjunkten i (i) følger da ved hjelp av Teorem 6 :

(v) wêk(s)

Fra den andre komponenten i (ii) kan man slutte:

(vi) (z;-1)"s Inkl ((z;-1)"(Δ;1 – {q})

Det er klart at man fra (ii) og (0) har qêΔ;1. Men dette, den andre konjunkten i (i), (0) og Lemma 6.8 impliserer:

(vii) (z;-1)"s Inkl (Δ;2 –{(z;-1)‘q})

Fra (0), (ii) og det at Func(z;-1) følger w= (z;-1)‘q. Sammen med (vii) gir dette:

(viii) (z;-1)"s Inkl (Δ;2 –{w})

Men wêΔ;2. Dette, (viii) og (3), samt den eksistenspremiss at (z;-1)"sêV gir oss:

(ix) ¬(wêk((z;-1)"s)

Vi skal nå vise at *dersom (0) holder og t Inkl Δ;1 for vilkårlig t så gjelder k(t) = k((z;-1)"t)*. Siden vi i lys av (i) har at s Inkl (Δ;1–{q}) vil vi da ha at k(s) = k(z;-1"s) som sammen med (v) og (ix) gir oss en motsigelse.

La oss derfor gi et bevis for den kursiverte påstand. Anta (a) t Inkl Δ;1 og at (0) holder. Betrakt et vilkårlig objekt rêt. Da har man rêΔ;1 og følgelig i lys av (0) at (b) <r,p>êz for noe p. Da er selvfølgelig pê(z;-1)"V og i lys av (0) har vi da (c) pêΔ;2. Men fra (b) og det at Cor(z) kan man slutte at r= z‘p. Fra (c) og (0) har man videre at Ekv(z‘p,p) og derfor Ekv(r,p). Fra (b) og forutsetningen om at rêt følger pê(z;-1)"t, som igjen ved hjelp av Teorem 1 gir oss pêk((z;-1)"t). Men vi hadde Ekv(r,p). Derfor har vi ved hjelp av Teorem 6 at rêk((z;-1)"t). Siden r var et vilkårlig objekt har vi nå vist:

t Inkl k((z;-1)"t)

Ved hjelp av Teorem 9 kan man fra dette slutte

(+) k(t) Inkl k((z;-1)"t).

Vi viser så inklusjonen den andre veien: Anta for vilkårlig r at rê(z;-1)"t. Da finnes p slik at <p,r>êz & pêt. Men da har man rê(z;-1)"V = Δ;2 ved hjelp av (0). Det følger også ved hjelp av den siste konjunkten i (0) at Ekv(z‘r,r). Men siden Cor(z) og <p,r>êz har man p = z‘r. Derfor: (d) Ekv(p,r). Siden pêt må man ha pêk(t). Dette sammen med (d) og Teorem 6 gir oss rêk(t). Men r var et vilkårlig objekt i (z;-1)"t. Vi har derfor vist (z;-1)"t Inkl k(t). Dette impliserer imidlertid ved hjelp av Teorem 9 at:

(++) k((z;-1)"t) Inkl k(t)

Fra (+) og (++) følger k(t) = k((z;-1)"t). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for den annonserte påstand. Vi har nå vist at det ikke kan finnes q,s slik at (i) holder. Dette innebærer at man må ha:

(7) (Aq)(qêΔ;1 –> (As)(s Inkl (Δ;1–{q}) –> ¬(qêk(s))))

(E) Anta for reduktio ad absurdum at det finnes q,s slik at:

(i) qêΔ;1 & s Inkl (Δ;1 –{q}) & N(q)êk(s)

På nøyaktig samme måte som i avsnitt (D) kan man vise at det må finnes w med

egenskapene:

(ii) Ekv(q,w)

(iii) N(w)êk((z;-1)"s)

Men fra (ii) følger Ekv(N(q),N(w)) som sammen med (i) gir en

(iv) N(w)êk(s)

Men man kan også på samme måte som under (D) vise at:

(v) k(s) = k((z;-1)"s)

Dette, sammen med (iii) og (iv) impliserer en motsigelse. Derfor må antagelsen at det finnes q,s slik at (i) være feilaktig. Følgelig har man:

(8) (Aq)(qêΔ;1 –> (As)(s Inkl (Δ;1–{q}) –> ¬(N(q)êk(s))))

fra (4), (5), (6), (7) og (8) samt Definisjon 4.3 følger Indp;2(Δ;1). **Q.E.D.**

**Teorem 60** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) & N(Δ;2). –> N(Δ;1)

**Bevis:** Fra den andre forutsetningen i satsen følger at det finnes z slik at:

(i) Cor(z) & (z;-1)"V = Δ;2 & z"V = Δ;1 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

Fra den tredje forutsetningen følger ved hjelp av definisjonen av N at det finnes y der:

(ii) yêO & yêk(Δ;2) & (Ax)(xêΔ;2 –> ¬(yêk(Δ;2–{x})))

Fra den andre konjunkten i (ii), den andre forutsetningen og Lemma 10 følger:

(iii) yêk(Δ;1)

Anta nå for vilkårlig w at (iv) wêΔ;1. Dette og (i) gir oss <w,x>êz for noe x. Da er det opplagt i lys av (i) at xê(z;-1)"V = Δ;2. Ved hjelp av (ii) har vi da:

(v) ¬(yêk(Δ;2–{x})

Fra (i), det at <w,x>êz og Lemma 9 følger:

(vi) k(Δ;2–{x}) = k(Δ;1–{w})

Dette og (v) impliserer:

(vii) ¬(yêk(Δ;1–{w})

Men w var et et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (iv). Man har derfor:

(viii) (Aw)(wêΔ;1 –> ¬(yêk(Δ;1–{w}))

Fra (ii), (iii) og (viii) samt Definisjon 5.3 følger så N(Δ;1). **Q.E.D.**

La oss tilslutt gi bevis for:

**Teorem 61** Δ;1,Δ;2êPt(S) & Isomorf(Δ;1,Δ;2) & N;2(Δ;2). –> N;2(Δ;1)

**Bevis:** Fra den første forutsetningen i satsen følger ved hjelp av definisjonen av isomorfi:

(1) Cor(z) & (z;-1)"V = Δ;2 & z"V = Δ;1 & (Ax)(xêΔ;2 –> Ekv(z‘x,x))

Fra den andre forutsetningen følger i lys av Definisjon 5.6:

(2) (Ax)(xêΔ;2 –> (Ey)(yêO & yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;2–{x}))))

Anta for vilkårlig w at (i) wêΔ;1. I lys av (1) følger da at (ii) <w,v>êz for noe v. Da er det klart at (iii) vê(z;-1)"V = Δ;2. Derfor har man ved hjelp av (2) at

(iv) yêO & yêk(Δ;2) & ¬(yêk(Δ;2–{x})) for noe y.

Fra den siste konjunkten i (iv), (i), (ii), (1) og Lemma 9 følger:

¬(yêk(Δ;1–{w}))

Fra den andre konjunkten i (iv) følger ved hjelp av den andre forutsetningen isatsen og Lemma 6.10 at yêk(Δ;1). Vi har derfor

(Ey)(yêO & yêk(Δ;1) & ¬(yêk(Δ;1–{w})))

Men w var et vilkårlig objekt slik at wêΔ;1. Man kan derfor konkludere med at

(3) $(Aw)(w\hat{e}\Delta;1 \rightarrow (Ey)(y\hat{e}O \,\&\, y\hat{e}k(\Delta;1) \,\&\, \neg(y\hat{e}k(\Delta;1-\{w\}))))$

I lys av Definisjon 5.6 innebærer dette at $N;2(\Delta;1)$. **Q.E.D.**

## §7 Enkelte satser om operatoren k, k* og ∑.

**Teorem 7.1**

(A) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg Setn(x)) \,\&\, \Delta\neq\emptyset \rightarrow k(\Delta)= \Delta U\{\emptyset\}$

(B) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow Setn(x)) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}k(\Delta) \rightarrow Setn(x))$

(C) $y= xUz \,\&\, (Aw)(w\hat{e}x \rightarrow \neg Setn(w)) \,\&\, (Aw)(w\hat{e}z \rightarrow Setn(w)) \,\&\, x\neq\emptyset \,\&z\neq\emptyset. \rightarrow k(y) = k(z)U(xU\{\emptyset\})$

(D) $y=\emptyset \rightarrow k(y)=\emptyset$

(E) $(Ax)(x\hat{e}k(\Delta) \rightarrow Setn(x)) \vee (Ez)(Ew)(k(\Delta) = k(z)UwU\{\emptyset\}) \vee k(\Delta) = \Delta U\{\emptyset\} \vee k(\Delta) =\emptyset$

**Bevis:** (A) Vi beviser denne setningen ved induksjon på $k(\Delta)$.

Basistrinn: Vi må vise at (0) $\Delta$ Inkl $\Delta U\{\emptyset\}$. Dette er imidlertid trivielt og holder uten videre.

Induksjonstrinn I. Det er nødvendig å vise at:

(1) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}\Delta U\{\emptyset\} \rightarrow K(x,y)\hat{e}\Delta U\{\emptyset\}$.

Er $x,y\hat{e}\Delta$ har vi i lys av forutsetningene at $\neg Setn(x) \,\&\, \neg Setn(y)$. Er $x=\emptyset$ har vi også i lys av aksiom ST9 at $\neg Setn(x)$. Tilsvarende om $y=\emptyset$. Vi har derfor om $x,y\hat{e}\Delta U\{\emptyset\}$ for vilkårlige x,y at (2) $\neg Setn(x) \,\&\, \neg Setn(y)$. Fra dette og Teorem 3.1 følger $K(x,y)=\emptyset$. Man må altså ha $K(x,y)\hat{e}\Delta U\{\emptyset\}$. Dette viser at (1) holder.

Induksjonstrinn II. Vi må også vise at følgende holder:

(3) $(Ax)(Ay)(x\hat{e}\Delta U\{\emptyset\} \,\&\, L(y,x) \rightarrow y\hat{e}\Delta U\{\emptyset\})$.

Anta derfor for vilkårlige x,y at (4) $x\hat{e}\Delta \,\&\, L(y,x)$. Fra den første konjunkten her og forutsetningene i (A) følger $\neg Setn(x)$. Fra den andre konjunkten og Teorem 3.1 følger $Setn(x) \,\&\, Setn(y)$. Dette gir oss åpenbart en motsigelse. Vi har derfor at $\neg(Ey)(Ex)(x\hat{e}\Delta \,\&L(y,x))$. Det er klart at dette impliserer (3) siden det ikke finnes noe som oppfyller antesedenten i (3).

Fra (0), (1) og (3) følger ved induksjon på $k(\Delta)$ at (5) $k(\Delta)$ Inkl $\Delta U\{\emptyset\}$. Merk her at vi benytter induksjonsteoremet Teorem 21. Stilltiende har vi da imidlertid benyttet den antagelse at $\Delta U\{\emptyset\}\hat{e}V$. Siden $\Delta$ her er et variabeltegn og ikke et mengdeabstrakt følger imidlertid dette fra de mengdeteoretiske eksistensaksiomene vi har oppført. Ved hjelp av Me1 og Me2 følger $\{\emptyset\}\hat{e}V$. Fra dette og Me3 har vi imidlertid også $\Delta U\{\emptyset\}\hat{e}V$.

Det er nødvendig å godtgjøre at man også har: (6) $\Delta U\{\emptyset\}$ Inkl $k(\Delta)$. Fra Teorem 1 følger $\Delta$ Inkl $k(\Delta)$. vi må imidlertid også vise at $\emptyset\hat{e}k(\Delta)$. Siden $\Delta\neq\emptyset$ har vi ha at (7) $x\hat{e}\Delta$ for noe x. Fra forutsetningene i (A) følger da $\neg Setn(x)$. Fra dette og Teorem 3.1 har vi (8) $K(x,x)=\emptyset$. Fra (7) og Teorem 2 følger imidlertid at $K(x,x)\hat{e}k(\Delta)$. Fra dette og (8) har man $\emptyset\hat{e}k(\Delta)$. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (A).

(B) Også denne påstanden bevises ved induksjon på $k(\Delta)$. I lys av Teorem 21 er det tiltrekkelig å vise:

(1) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow Setn(x))$

(2) $(Ax)(Ay)(Setn(x) \,\&\, Setn(y) \rightarrow Setn(K(x,y)))$

(3) $(Ax)(Ay)(Setn(x) \,\&\, L(y,x). \rightarrow Setn(y))$

(4) Mg(z: Setn(z))êV

Når det gjelder (1) er dette en triviell følge av forutsetningen i påstanden. (2) følger umiddelbart fra Teorem 3.1 (vi). (3) følger er igjen en temmelig triviell konsekvens av Teorem 3.1 (v). Endelig følger (4) fra ST10. (Se §3). Dette viser at (B) holder.

(C) Anta (1) y= xUz & (Aw)(wêx –> ¬Setn(w)) &
(Aw)(wêz –> Setn(w)) & x≠ø &z≠ø.

Vi ønsker å vise (+) k(y) = k(z)U(xU{ø}). Vi viser først inklusjonen mot høyre i (+), dvs. (2) k(y) Inkl k(z)U(xU{ø}). Dette vises ved induksjon på k(Δ). I lys av Teorem 21 er det tilstrekkelig å bevise:

(3) y Inkl k(z)U(xU{ø})
(4) (Aw)(Av)(w,vêk(z)U(xU{ø}) –> K(w,v)êk(z)U(xU{ø}))
(5) (Aw)(Av)(wêk(z)U(xU{ø}) &L(v,w). –> vêk(z)U(xU{ø}))
(6) k(z)U(xU{ø})êV

Nå har man at z Inkl k(z) ifølge Teorem 1. Videre er det opplagt at x Inkl (xU{ø}). Fra disse to påstandene følger det at (3) holder. La oss gi bevis for (4): Anta for vilkårlige w,v at (7) w,vêk(z)U(xU{ø}).

Tilfelle (i): w,vêk(z). Ved hjelp av Teorem 2 følger herav K(w,v)êk(z) Inkl k(z)U(xU{ø}). Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): wêk(z) & vêxU{ø}. I tilfelle v=ø har vi ved hjelp av ST9 at ¬Setn(ø) og derfor ¬Setn(v). Fra dette og Teorem 3.1 følger så K(w,v)=ø og derfor K(w,v)êk(z)U(xU{ø}). Er vêx har vi fra (1) at ¬Setn(v). Det følger på samme vis at K(w,v)êk(z)U(xU{ø}).

Tilfelle (iii): vêk(z) & wêxU{ø}. Dette tilfellet behandles på samme måte som Tilfelle (ii).

Tilfelle (iv): w,vê(xU{ø}). Da har man i lys av (1) at ¬Setn(w) & ¬Setn(v). Fra dette og Teorem 3.1 følger K(w,v)=øê(xU{ø}) Inkl k(z)U(xU{ø}).

Man har i alle tilfelle at K(w,v)êk(z)U(xU{ø})). Dette viser at (4) holder.
La oss så vise at (5) holder. Anta for vilkårlige w,v at (8) wêk(z)U(xU{ø}) og at (9) L(v,w). Er wêk(z) har man ved hjelp av Teorem 5 og (9) at vêk(z). (5) holder derfor i dette tilfellet. Er wê(xU{ø}) følger fra (1) og ST9 at ¬Setn(w). Dette og Teorem 3.1 (v) impliserer ¬L(v,w). Dette strider imidlertid mot (9) slik at dette tilfellet er utelukket. Vi har derfor vêk(z)U(xU{ø}). Dette viser at (5) holder.

Fra (1) følger at z Inkl S. Fra dette og (b) følger at k(z) Inkl S. Dette og ST10 impliserer at k(z)êV. Nå har man fra de mengdeteoretiske aksiomene at xU{ø}êV. I lys av Me3 følger derfor k(z)U(xU{ø})êV. Dette viser at (6) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (2).

Vi må imidlertid også bevise inklusjonen mot venstre i (+), dvs. at det må bevises at k(z)U(xU{ø}) Inkl k(y). Nå er det lett å vise

(‡) (Ax)(Ay)(x Inkl y –> k(x) Inkl k(y))

Siden z Inkl y følger det at (10) k(z) Inkl k(y). Siden videre x Inkl y i lys av (1) følger det at (11) x Inkl k(x) Inkl k(y). Man har derfor at k(z)Ux Inkl k(y). Nå har man ifølge (1) at x≠ø. Det finnes derfor q slik at qêx. Fra dette og (1) har man ¬Setn(q). Herav følger ved hjelp av Teorem 3.1 at K(q,q)=ø. I lys av Teorem 2 må man da ha ø=K(q,q)êk(x) Inkl k(y). Det følger at k(z)U(xU{ø}) Inkl k(y). Det gjenstar bare å bevise (‡). Dette er imidlertid enkelt og overlates til leseren. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (C).

(D) Denne påstanden er en direkte konsekvens av Teorem 20 i §4.

(E) I forbindelse med denne påstanden skiller vi mellom to hovedtilfeller.
Tilfelle (i): $\Delta=\emptyset$. I så tilfelle har vi ved hjelp av (D) at $k(\Delta)=\emptyset$. I dette tilfellet holder derfor åpenbart (E).
Tilfelle (ii): $\Delta\neq\emptyset$. I så fall må man skille mellom tre undertilfelle.

Undertilfelle (ii.1): $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow Setn(x))$. Da har vi ved hjelp av (B) at $(Ax)(x\hat{e}k(\Delta) \rightarrow Setn(x))$. Men fra dette følger umiddelbart (E)

Undertilfelle (ii.2): $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg Setn(x))$. I dette tilfelle har vi ved hjelp av punkt (A) i satsen, siden $\Delta\neq\emptyset$ at $k(\Delta) = \Delta U\{\emptyset\}$. Man ser at (E) følger fra dette. Påstanden holder derfor også i dette tilfellet.

Undertilfelle (ii.3): $(Eq)(Ep)(q,p\hat{e}\Delta \,\&\, Setn(q) \,\&\, \neg Setn(p))$. I så fall setter vi per definisjon $z= Mg(q: Setn(q) \,\&\, q\hat{e}\Delta)$ og $w= Mg(p: \neg Setn(p) \,\&\, p\hat{e}\Delta)$. Det er da klart at følgende holder:

(1) $\Delta=zUw \,\&\, (Ax)(x\hat{e}z \rightarrow Setn(x)) \,\&\, (Ax)(x\hat{e}w \rightarrow \neg Setn(x)) \,\&\, z\neq\emptyset \,\&\, w\neq\emptyset$

(Siden z og w er delmengder av $\Delta$ følger det ved hjelp av våre mengdeteoretiske aksiomer at de eksisterer). Fra (1) og punkt (C) i teoremet følger:
$k(\Delta) = k(z)UwU\{\emptyset\}$ og derfor $(Ez)(Ew)(k(\Delta) = k(z)UwU\{\emptyset\})$ . Fra dette følger i sin tur (E). Vi har nå vist at (E) holder i alle mulige tilfelle.

Dette avslutter beviset for Teorem 7.1. **Q.E.D.**

Så langt har vi primært beskjeftiget oss med konsekvensmengde-operatoren k. Vi definerte imidlertid i §3 også operatoren $\sum$. (Se Definisjon 3.6 og Definisjon 3.7). I visse henseende, men selvfølgelig ikke i alle, er de lover som gjelder for $\sum$ analoge med dem som gjelder for k. Dette fremgår av den følgende sats:

**Teorem 7.2**

(i) $x\hat{e}\sum(y) \rightarrow N(x)\hat{e}\sum(y)$
(ii) $x,y\hat{e}\sum(z) \rightarrow K(x,y)\hat{e}\sum(z)$
(iii) $Mg(x: F(x))\hat{e}V \,\&\, (Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow F(x)) \,\&\, (Ax)(Ay)(F(x) \,\&\, F(y) \rightarrow F(N(x)) \,\&\, F(K(x,y))). \rightarrow (Ax)(x\hat{e}\sum(\Delta) \rightarrow F(x))$
(iv) $y \text{ Inkl } \sum(y)$
(v) $x \text{ Inkl } y \rightarrow \sum(x) \text{ Inkl } \sum(y)$
(vi) $\sum/n/(x) = \sum(x)\ (n\geq 1)$
(vii) $\Delta=\emptyset \rightarrow \sum(\Delta)=\emptyset$
(viii) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow \neg Setn(x)) \,\&\, \Delta\neq\emptyset \rightarrow \sum(\Delta) = \Delta U\{\emptyset\}$
(ix) $(Ax)(x\hat{e}\Delta \rightarrow Setn(x)) \rightarrow (Ax)(x\hat{e}\sum(\Delta) \rightarrow Setn(x))$
(x) $y= xUz \,\&\, (Aw)(w\hat{e}x \rightarrow \neg Setn(w)) \,\&\, (Aw)(w\hat{e}z \rightarrow Setn(w)) \,\&\, x\neq\emptyset \,\&z\neq\emptyset. \rightarrow \sum(y) = \sum(z)U(xU\{\emptyset\})$
(xi) $(Ax)(x\hat{e}\sum(\Delta) \rightarrow Setn(x)) \text{ v } (Ez)(Ew)(\sum(\Delta) = \sum(z)UwU\{\emptyset\}) \text{ v } \sum(\Delta) = \Delta U\{\emptyset\} \text{ v } \sum(\Delta) =\emptyset)$
(xii) $\sum(x) \text{ Inkl } \sum(k(x))$

**Bevis:**

(i) Anta (1) $x\hat{e}\sum(y)$. Dette innebærer i lys av Definisjon 3.7 at
(2) $(At)(H(y,t) \rightarrow x\hat{e}t)$. Vi må vise at $N(x)\hat{e}\sum(y)$. Anta derfor for vilkårlig t at (3) $H(y,t)$. Fra Definisjon 3.6 følger herav:

(4) $((Ax)(x\hat{e}y \rightarrow x\hat{e}t) \,\&\, (Ax)(Ay)(x,y\hat{e}t \rightarrow N(x), K(x,y)\hat{e}t))$

Fra (2) og (3) har man da $x\hat{e}t$. Dette og (4) gir en åpenbart $N(x)\hat{e}t$. Men t var et vilkårlig

objekt, derfor har vi vist: (At)(H(y,t) –> N(x)êt). Fra dette og definisjonen av operasjonen ∑ følger N(x)ê∑(y). Dette viser at (i) holder.

(ii) Anta (1) x,yê∑(z). Fra definisjonen av ∑ kan man herav slutte:
(2) (At)(H(z,t) –> x,yêt). Anta for vilkårlig t at (3) H(z,t). Fra definisjonen av predikatet H følger da:

(4) (Ax)(xêy –> xêt) & (Ax)(Ay)(x,yêt –> N(x), K(x,y)êt)

Fra (2) og (3) har man x,yêt. Dette og den andre konjunkten i (4) impliserer K(x,y)êt. Men t var et vilkårlig objekt, derfor (At)(H(z,t) –> K(x,y)êt). Fra dette og Definisjon 3.7 følger K(x,y)ê∑(z). Dette viser at (ii) holder.

(iii) Anta at følgende holder:

(1) Mg(x: F(x))êV
(2) (Ax)(xêΔ –> F(x))
(3) (Ax)(Ay)(F(x) & F(y) –> F(N(x)) & F(K(x,y)))

Anta for vilkårlig x at (4) xê∑(Δ). I lys av definisjonen av ∑ innebærer dette:

(5) (At)(H(Δ,t) –> xêt). Siden Mg(z:F(z))êV kan vi i (5) instansiere med hensyn på Mg(z:F(z)). Vi får da:

(6) H(Δ, Mg(z: F(z))) –> F(x)

Nå har vi i lys av definisjonen av predikatet H at antesedenten i (6) er ekvivalent med konjunksjonen av (2) og (3). Fra (2) og (3) følger derfor
H(Δ, Mg(z: F(z))). Fra dette og (6) kan man derfor slutte F(x). Men x var et vilkårlig objekt i ∑(Δ). Det følger at (Ax)(xê∑(Δ) –> F(x)).

(iv) Anta (1) xêy for vilkårlig x. Anta for vilkårlig t at H(y,t). Da har man ved hjelp av Definisjon 3.7 at følgende holder: (Ax)(xêy –> xêt). Det følger at xêt. Siden t var vilkårlighar man at (At)(H(y,t) –> xêt), og derfor ved hjelp av definisjonen av ∑ at xê∑(y). Siden x var vilkårlig følger y Inkl ∑(y).

(v) Anta (1) x Inkl y og anta for vilkårlig z at (2) zê∑(x). Fra (2) følger ved hjelp av definisjonen av ∑ at (3) (At)(H(x,t) –> zêt). Anta nå for vilkårlig s at (4) H(y,s). Fra dette og definisjonen av H følger:

(5) (Az)(zêy –> zês) & (Aw)(Av)(w,vês –> N(w), K(w,v)ês)

Fra (1) og (5) følger: (Az)(zêx –> zês) & (Aw)(Av)(w,vês –> N(w), K(w,v)ês). Herav har man H(x,s). Dette og (3) gir en så zês. Men s var et vilkårlig objekt. Derfor (As)(H(y,s) –> zês). Fra definisjonen av ∑ følger herav det vi ønsker, nemlig zê∑(y). Dette viser at (5) holder.

(vi) Vi viser først (1) ∑(∑(x)) = ∑(x). Inklusjonen mot venstre følger her umiddelbart fra det vi beviste under punkt (iv). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise ∑(∑(x)) Inkl ∑(x). Anta derfor for vilkårlig z at (1) zê∑(∑(x)). Fra dette og definisjonen av ∑ følger:

(2) (At)(H(∑(x),t) –> zêt)

Vi må vise at zê∑(x). Anta derfor for vilkårlig s at (3) H(x,s). Det vil være tilstrekkelig å vise at H(x,s) impliserer H(∑(x),s). For i så fall har vi ved hjelp av (2) at zês. I lys av definisjonen av H er H(∑(x),s) ekvivalent med:

(4) ((Ar)(rê∑(x) –> rês) & (Aw)(Av)(w,vês –> N(w), K(w,v)ês))

På den annen side er (3) ekvivalent med:

(5) ((Ar)(rêx –> rês) & (Aw)(Av)(w,vês –> N(w), K(w,v)ês))

Vi må altså vise at (5) impliserer (4). Det er da åpenbart tilstrekkelig å vise at (5) impliserer

den første konjunkten i (4). Anta derfor for vilkårlig r at rê∑(x). I lys av definisjonen av ∑ impliserer dette (Ap)(H(x,p) –> rêp). Herav ved instansiering: H(x,s) –> rês. Men (5) impliserer H(x,s). Derfor rês. Men r var vilkårlig element i ∑(x). Defor: (Ar)(rê∑(x) –> rês). Dette viser at (5) impliserer (4). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (1). Den generelle satsen
∑/n/(x) = ∑(x) (n≥1) følger ved hjelp av et trivielt induksjonsbevis på n hvor (1) benyttes.

(vii) Det er trivielt at ø Inkl ∑(ø). Anta xê∑(ø) for vilkårlig x. I lys av definisjonen av ∑ har man da (Ar)(H(ø,r) –> xêr). Fra dette følger siden øêV at
(1) H(ø,ø) –> xêø. Men H(ø,ø) er ekvivalent med:
(2) (Ax)(xêø –> xêø) & (Ax)(Ay)(x,yêø –> N(x), K(x,y)êø)
Som man ser holder (2). Men fra (1) og (2) følger derfor xêø. Siden x var et vilkårlig element følger ∑(ø) Inkl ø. Dette viser at påstanden holder.

(viii) Vi beviser denne setningen ved induksjon på ∑(Δ).
Basistrinn: Vi må vise at (0) Δ Inkl ΔU{ø}. Dette er imidlertid trivielt og holder uten videre.
Induksjonstrinn I. Det er nødvendig å vise at:
(1) (Ax)(xêΔU{ø} –> N(x)êΔU{ø}.
Er xêΔ har vi i lys av forutsetningene at ¬Setn(x). Er x=ø har vi også i lys av aksiom ST9 at ¬Setn(x). Vi har derfor om xêΔU{ø} for vilkårlig x at (2) ¬Setn(x). Fra dette og Teorem 3.1 følger N(x) =ø. Man må altså ha N(x)êΔU{ø}. Dette viser at (1) holder.
Induksjonstrinn II. Det er nødvendig å vise at:
(3) (Ax)(Ay)(x,yêΔU{ø} –> K(x,y)êΔU{ø}.
Er x,yêΔ har vi i lys av forutsetningene at ¬Setn(x) & ¬Setn(y). Er x=ø har vi også i lys av aksiom ST9 at ¬Setn(x). Tilsvarende om y=ø. Vi har derfor om x,yêΔU{ø} for vilkårlige x,y at (2) ¬Setn(x) & ¬Setn(y). Fra dette og Teorem 3.1 følger K(x,y)=ø. Man må altså ha K(x,y)êΔU{ø}. Dette viser at (1) holder.

Fra (0), (1) og (3) følger ved induksjon på k(Δ) at (5) k(Δ) Inkl ΔU{ø}. Merk her at vi benytter punkt (iii) ovenfor. Stilltiende har vi da imidlertid benyttet den antagelse at ΔU{ø}êV. Siden Δ her er et variabeltegn og ikke et mengdeabstrakt følger imidlertid dette fra de mengdeteoretiske eksistensaksiomene vi har oppført. Ved hjelp av Me1 og Me2 følger {ø}êV. Fra dette og Me3 har vi imidlertid også ΔU{ø}êV.

Det er nødvendig å godtgjøre at man også har: (6) ΔU{ø} Inkl ∑(Δ). Fra punkt (iv) følger Δ Inkl ∑(Δ). Vi må imidlertid også vise at øê∑(Δ). Siden Δ≠ø har vi ha at (7) xêΔ for noe x. Fra forutsetningene i (A) følger da ¬Setn(x). Fra dette og Teorem 3.1 har vi (8) K(x,x)=ø. Fra (7) og punkt (ii) følger imidlertid at K(x,x)êk(Δ). Fra dette og (8) har man øêk(Δ). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (viii).

(ix) Også denne påstanden bevises ved induksjon på ∑(Δ). I lys av punkt (iii) er det tiltrekkelig å vise:
(1) (Ax)(xêΔ –> Setn(x))
(2) (Ax)(Ay)(Setn(x) –>Setn(N(x))
(3) (Ax)(Ay)(Setn(x) & Setn(y) –> Setn(K(x,y))
(4) Mg(z: Setn(z))êV
Når det gjelder (1) er dette en triviell følge av forutsetningen i påstanden. (2) følger umiddelbart fra Teorem 3.1 (iii). (3) følger er igjen en temmelig triviell konsekvens av Teorem 3.1 (vi). Endelig følger (4) fra ST10. (Se §3). Dette viser at (ix) holder.

(x) Anta (1) y= xUz & (Aw)(wêx –> ¬Setn(w)) &

(Aw)(wêz –> Setn(w)) & x≠ø &z≠ø.

Vi ønsker å vise (+) ∑(y) = ∑(z)U(xU{ø}). Vi viser først inklusjonen mot høyre i (+), dvs. (2) ∑(y) Inkl ∑(z)U(xU{ø}). Dette vises ved induksjon på ∑(Δ). I lys av (iii) er det tilstrekkelig å bevise:

(3) y Inkl ∑(z)U(xU{ø})

(4) (Aw)(wê∑(z)U(xU{ø}) –> N(w)ê∑(z)U(xU{ø}))

(5) (Aw)(Av)(w,vêk(z)U(xU{ø}) –> K(w,v)ê∑(z)U(xU{ø}))

(6) ∑(z)U(xU{ø})êV

Nå har man at z Inkl ∑(z) ifølge (iv). Videre er det opplagt at x Inkl (xU{ø}). Fra disse to påstandene følger det at (3) holder.

La oss gi bevis for (4): Anta for vilkårlig w at (7) wê∑(z)U(xU{ø}).

Tilfelle (i): wê∑(z). Ved hjelp av (i) følger herav N(w)ê∑(z) Inkl ∑(z)U(xU{ø}). Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): wêxU{ø}. I tilfelle w=ø har vi ved hjelp av ST9 at ¬Setn(ø) og derfor ¬Setn(w). Fra dette og Teorem 3.1 følger så N(w)=ø og derfor N(w)ê∑(z)U(xU{ø}). Er wêx har vi fra (1) at ¬Setn(w). Det følger på samme vis at N(w)ê∑(z)U(xU{ø}).

Man har i alle tilfelle at N(w)ê∑(z)U(xU{ø})). Dette viser at (4) holder.

La oss gi bevis for (5): Anta for vilkårlige w,v at (8) w,vê∑(z)U(xU{ø}).

Tilfelle (i): w,vê∑(z). Ved hjelp av punkt (ii) følger herav K(w,v)ê∑(z) Inkl ∑(z)U(xU{ø}). Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii): wê∑(z) & vêxU{ø}. I tilfelle v=ø har vi ved hjelp av ST9 at ¬Setn(ø) og derfor ¬Setn(v). Fra dette og Teorem 3.1 følger så K(w,v)=ø og derfor K(w,v)ê∑(z)U(xU{ø}). Er vêx har vi fra (1) at ¬Setn(v). Det følger på samme vis at K(w,v)ê∑(z)U(xU{ø}).

Tilfelle (iii): vê∑(z) & wêxU{ø}. Dette tilfellet behandles på samme måte som Tilfelle (ii).

Tilfelle (iv): w,vê(xU{ø}). Da har man i lys av (1) at ¬Setn(w) & ¬Setn(v). Fra dette og Teorem 3.1 følger K(w,v)=øê(xU{ø}) Inkl ∑(z)U(xU{ø}).

Man har i alle tilfelle at K(w,v)ê∑(z)U(xU{ø})). Dette viser at (5) holder.

Fra (1) følger at z Inkl S. Fra dette og (ix) følger at k(z) Inkl S. Dette og ST10 impliserer at ∑(z)êV. Nå har man fra de mengdeteoretiske aksiomene at xU{ø}êV. I lys av Me3 følger derfor ∑(z)U(xU{ø})êV. Dette viser at (6) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (2).

Vi må imidlertid også bevise inklusjonen mot venstre i (+), dvs. at det må bevises at ∑(z)U(xU{ø}) Inkl ∑(y). Nå er det lett å vise (se punkt (v)):

(‡) (Ax)(Ay)(x Inkl y –> ∑(x) Inkl ∑(y))

Siden z Inkl y følger det at (10) ∑(z) Inkl k(y). Siden videre x Inkl y i lys av (1) følger det at (11) x Inkl ∑(x) Inkl ∑(y). Man har derfor at k(z)Ux Inkl k(y). Nå har man ifølge (1) at x≠ø. Det finnes derfor q slik at qêx. Fra dette og (1) har man ¬Setn(q). Herav følger ved hjelp av Teorem 3.1 at K(q,q)=ø. I lys av punkt (ii) må man da ha ø=K(q,q)êk(x) Inkl k(y). Det følger at k(z)U(xU{ø}) Inkl k(y). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (x).

(xi) I forbindelse med denne påstanden skiller vi mellom to hovedtilfeller.

Tilfelle (i): Δ=ø. I så tilfelle har vi ved hjelp av (vii) at ∑(Δ)=ø. I dette tilfellet holder derfor åpenbart (xi).

Tilfelle (ii): Δ≠ø. I så fall må man skille mellom tre undertilfelle.

Undertilfelle (ii.1): (Ax)(xêΔ –>Setn(x)). Da har vi ved hjelp av (ix) at (Ax)(xê∑(Δ) –> Setn(x)). Men fra dette følger umiddelbart (xi)

Undertilfelle (ii.2): (Ax)(xêΔ –> ¬Setn(x)). I dette tilfelle har vi ved hjelp av punkt (viii) i satsen, siden Δ≠ø at k(Δ) = ΔU{ø}. Man ser at (xi) følger fra dette. Påstanden holder derfor også i dette tilfellet.

Undertilfelle (ii.3): (Eq)(Ep)(q,pêΔ & Setn(q) & ¬Setn(p)). I så fall setter vi per definisjon z= Mg(q: Setn(q) & qêΔ) og w= Mg(p: ¬Setn(p) &pêΔ). Det er da klart at følgende holder:

(1) Δ=zUw & (Ax)(xêz –> Setn(x)) &
(Ax)(xêw –> ¬Setn(x)) & z≠ø & w≠ø

(Siden z og w er delmengder av Δ følger det ved hjelp av våre mengdeteoretiske aksiomer at de eksisterer). Fra (1) og punkt (x) i teoremet følger:
∑(Δ) = ∑(z)UwU{ø} og derfor (Ez)(Ew)(∑(Δ) = ∑(z)UwU{ø}) . Fra dette følger i sin tur (xi). Vi har nå vist at (xi) holder i alle mulige tilfelle.

(xii) Det følger ved hjelp av (viii), (ix) og eksistensantagelsene for mengder i teorien at ∑(x)êV. Siden x Inkl k(x) følger ved hjelp av punkt (v) ovenfor at
∑(x) Inkl ∑(k(x)).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

De følgende påstander gjelder for operatoren k* som også ble introdusert i §3.

**Teorem 7.3**

(i) zêy –> (zêx –> zêk*(x,y))
(ii) z,wêy –> (z,wêk*(x,y) –> K(z,w)êk*(x,y))
(iii) k*(x,y) = k*(xΩy,y)
(iv) x Inkl y –> k*(x,z) Inkl k*(y,z)
(v) x Inkl y –> k*(z,x) Inkl k*(z,y)
(vi) Mg(z:F(z))êV & (Az)(zêxΩy –> F(z)) &
(Az)(Aw)(z,wêy & F(z) & F(w) –> F(K(z,w))) &
(Az)(Aw)(z,wêy & F(z) & L(w,z) –> F(w)). –>
(Az)(zêk*(x,y) –> F(z))
(vii) xΩy = ø –> k*(x,y)=ø
(viii) k*(x,V) = k(x)
(ix) k*(x,a) Inkl k(x)
(x) k*(x,k(x)) = k(x)
(xi) x,zêy & xêk*(Δ,y) & L(z,x) –> zêk*(Δ,y)

**Bevis:** (i) Anta for vilkårlig z at (1) zêy & zêx. Vi må vise at zêk*(x,y). I lys av definisjonen av k*, Definisjon 3.5, er det tilstrekkelig å bevise:

(2) (At)(Q;y(x,t) –> zêt)

Anta derfor for vilkårlig t at Q;y(x,t). Fra dette og Definisjon 3.4 følger:

(3) (Az)(zêy & zêx –> zêt). Men fra (1) og (3) har man zêr. Siden t var et vilkårlig objekt viser dette at (2) holder og derfor at man har zêk*(x,y).

(ii) Anta for vilkårlige z,w at (1) z,wêy og dessuten (2) z,wêk*(x,y). Fra det siste følger ved hjelp av definisjonen av k* at (3) (At)(Q;y(x,t) –> z,wêt). Det vil være tilstrekkelig å

bevise: (4) (At)(Q;y(x,t) –> K(z,w)êt). Anta derfor for vilkårlig t at (5) Q;y(x,t). Fra dette og Definisjon 3.4 følger:

(6) (Az)(Aw)(z,wêy & z,wêt –> K(z,w)êt)

Fra (1), (3) og (5) har man z,wêy & z,wêt. Dette og (6) impliserer K(z,w)êt. Men t var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (5). Dette viser at (4) holder. Det følger at (ii) holder.

(iii) Anta (1) zêk*(x,y) for vilkårlig z. Dette og definisjonen av k* gir en
(2) (At)Q;y(x,t) –> zêt). For å vise inklusjonen mot høyre er det nok å vise at
(3) (At)(Q;y(xΩy,t) –> zêt). Anta derfor for vilkålig t at (4) Q;y(xΩy,t). Fra dette og Definisjon3.4 har man:

(5) (Az)(zêy & zêxΩy –> zêt)
(6) (Az)(Aw)(z,wêy & z,wêt –> K(z,w)êt)
(7) ((Az)(Aw)(z,wêy &wêt& L(z,w) –> zêt)

Fra (5) følger åpenbart (8) (Az)(zêy & zêx –> zêt) . Dette, sammen med (6), (7) og Definisjon 3.4 impliserer Q;y(x,t). Sammen med (2) har man herav at zêt. Men t var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (4). Dette viser at (3) holder og derfor at zêk*(xΩy,y). Vi har dermed vist at k*(x,y) Inkl k*(xΩy,y).

Det er nødvendig å vise inklusjonen den andre veien. Anta derfor for vilkårlig z at (8) zêk*(xΩy,y). Herav har man ved hjelp av definisjonen av k* at
(9) (At)(Q;y(xΩy,t) –> zêt). Anta for vilkårlig t at (10) Q;y(x,t). Ved hjelp av definisjonen av Q følger herav:

(11) (Az)(zêy & zêx –> zêt)
(12) (Az)(Aw)(z,wêy & z,wêt –> K(z,w)êt)
(13) ((Az)(Aw)(z,wêy &wêt& L(z,w) –> zêt)

Fra (11) følger åpenbart (Az)(zêy & zêxΩy –> zêt). Dette sammen med (12), (13) og definisjonen av Q;y impliserer Q;y(xΩy,t). Dette og (9) gir en zêt. Men t var et vilkårlig objekt der man hadde at Q;y(x,t). Det følger at (At)(Q;y(x,t) –> zêt). Dette innebærer i sin tur at zêk*(x,y). Det følger at inklusjonen mot venstre i (iii) også holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (iii).

(iv) Anta (1) x Inkl y & wêk;(x,z) for vilkårlig w. Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av k*:

(2) (At)(Q;z(x,t) –> wêt)

Anta for vilkårlig t at (3) Q;z(y,t). Vi ønsker å vise at wêt. Fra (3) og Definisjon 3.4 følger:

(4) (Aw)(wêz & wêy –> wêt)
(5) (Aw)(Av)(w,vêz & w,vêt –> K(w,v)êt)
(6) (Aw)(Av)(w,vêz & vêt & L(w,v). –> wêt)

Siden x Inkl y ifølge (1) har man umiddelbart fra (4) at (Aw)(wêz & wêx –> wêt). Dette impliserer sammen med (5), (6) og Definisjon 3.4 at Q;z(x,t). Sammen med (2) impliserer så dette wêt som er det vi ønsker. Dette viser at (iv) holder.

(v) Anta (1) x Inkl y & wêk;(z,x) for vilkårlig w. Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av k*:

(2) (At)(Q;x(z,t) –> wêt)

Anta for vilkårlig t at (3) Q;y(z,t). Vi ønsker å vise at wêt. Fra (3) og Definisjon 3.4 følger:

(4) (Aw)(wêy & wêz –> wêt)
(5) (Aw)(Av)(w,vêy & w,vêt –> K(w,v)êt)

(6) (Aw)(Av)(w,vêy & vêt & L(w,v). –> wêt)

Siden x Inkl y ifølge (1) har man umiddelbart fra (4) at (Aw)(wêx & wêz –> wêt). Dette impliserer sammen med (5), (6) og Definisjon 3.4 at Q;x(z,t). Sammen med (2) impliserer så dette wêt som er det vi ønsker. Dette viser at (v) holder.

(vi) Anta følgende holder:

(1) Mg(z:F(z))êV

(2) (Az)(zêxΩy –> F(z))

(3) (Az)(Aw)(z,wêy & F(z) & F(w) –> F(K(z,w)))

(4) (Az)(Aw)(z,wêy & F(z) & L(w,z) –> F(w))

Anta videre at (5) zêk*(x,y) for vilkårlig z. I lys av definisjonen av k* innebærer dette: (6) (At)(Q;y(x,t) –> zêt). Fra (1) følger det at det finnes noe q slik at q= Mg(z: F(z)). Vi har derfor om vi setter inn "Mg(z: F(z))" for "t" i (6):

(7) Q;y(x, Mg(z: F(z))) –> F(z))

Nå ser man at konjunksjonen av (2), (3) og (4) impliserer Q;y(x, Mg(z: F(z))). Fra dette og (7) har man da F(z). Siden z var vilkårlig følger at at vi har bevist: (Az)(zêk*(x,y) –> F(z)). Dette viser at (vi) holder.

(vii) Anta xΩy=ø. Vi ønsker å vise k*(x,y)=ø. Det vil være tilstrekkelig å vise:

(Az)(zêk*(x,y) –> zêø)

Anta zêk*(x,y). Fra definisjonen av k* følger herav:

(At)(Q;y(x,t) –> zêt)

Herav Q;y(x,ø) –> xêø. (Siden øêV). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at Q;y(x,ø) holder om xΩy=ø. Men i lys av definisjonen av "Q;y(Δ,t)" er dette temmelig åpenbart.

(viii) Anta (1) zêk*(x,V). I lys av definisjonen av k* er dette ekvivalent med: (2) (At)(Q;V(x,t) –> zêt). På den annen side er zêk(x) ekvivalent med den følgende påstand: (3) (At)(Q(x,t) –> zêt). Det vil være tilstrekkelig å vise at Q;V(x,t) er ekvivalent med Q(x,t). Vi har at Q;V(x,t) er ekvivalent med konjunksjonen av de følgende setninger:

(4) (Aw)(wêV & wêx –> wêt)

(5) (Aw)(Av)(w,vêV & w,vêt –> K(w,v)êt)

(6) (Aw)(Av)(w,vêV & vêt & L(w,v). –> wêt)

Siden V= Mg(x: x=x) har vi at wêV er ekvivalent med w=w. (4) – (6) er derfor ekvivalente med henholdsvis:

(7) (Aw)(wêx –> wêt)

(8) (Aw)(Av)(w,vêt –> K(w,v)êt)

(9) (Aw)(Av)(vêt & L(w,v). –> wêt)

I lys av definisjonen av Q, Definisjon 3.2 er imidlertid konjunksjonen av (7) – (9) ekvivalent med Q(x,t). Dette viser at (viii) holder.

(ix) Anta (1) zêk*(x,a) for vilkårlig z. Fra definisjonen av k* følger: (2) (At)(Q;a(x,t) –> zêt). Vi ønsker å vise at zêk(x). Anta derfor for vilkårlig t at (3) Q(x,t). Ved hjelp av definisjon 3.2 følger herav:

(4) (Aw)(wêx –> wêt)

(5) (Aw)(Av)(w,vêt –> K(w,v)êt)

(6) (Aw)(Av)(vêt & L(w,v). –> wêt)

Fra (4) – (6) følger henholdsvis:

(4) (Aw)(wêa & wêx –> wêt)

(5) (Aw)(Av)(w,vêa & w,vêt –> K(w,v)êt)

(6) (Aw)(Av)(w,vêa & vêt & L(w,v). –> wêt)

Men konjunksjonen av (4) – (6) er ekvivalent med Q;a(x,t). Fra dette og (2) har vi derfor: zêt. Men t var et vilkårlig objekt som oppfylte kravet (3). Vi har derfor vist: (At)(Q(x,t) – > zêt). I lys av Definisjon 3.3 impliserer dette zêk(x). Dette viser at påstanden (ix) holder.

(x) At (1) k*(x,k(x)) Inkl k(x) følger fra det foregående punkt i lys av det forhold at vi kan vise at k(x)êV. Det vil derfor være tilstrekkelig å vise
(2) k(x) Inkl k*(x,k(x)). Vi viser dette ved induksjon på k(x). Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(a) (Az)(zêx –> zêk*(x,k(x))
(b) (Az)(Aw)(z,wêk*(x,k(x)) –> K(z,w)êk*(x,k(x)))
(c) (Az)(Aw)(zêk*(x,k(x)) & L(w,z). –> wêk*(x,k(x)))
(d) k*(x,k(x))êV

Ad (a): Fra punkt (i) følger, siden k(x)êV, at (3) (Az)(zêx & zêk(x) –> zêk*(x,k(x)))
Siden vi har x Inkl k(x) følger (a) fra (3).
Ad (b): Fra punkt (ii) følger om vi setter inn "k(x)" for "y"

(4) z,wêk(x) & z,wêk*(x,k(x)). –> K(z,w)êk*(x,k(x))

Men i lys av (1) ovenfor impliserer dette (b).
Ad (c): Vi viser at vi generelt har:

(5) z,wêy & zêk*(x,y) & L(w,z). –> wêk*(x,y).

Fra den andre forutsetningen i (5) og definisjonen av k* følger:

(6) (At)(Q;y(x,t) –> zêt). Anta for vilkårlig t at Q;y(x,t). Da har vi etter definisjonen av Q;y at:

(7) (Az)(Aw)(z,wêy & zêt & L(w,z) –> wêt). Fra dette og (5) følger wêt. Men t var vilkårlig. Derfor: (At)(Q;y(x,t) –> wêt). Herav wêk*(x,y). Dette viser at (5) holder.
Siden k(x)êV følger fra (5):

(8) z,wêk(x) & zêk*(x,k(x)) & L(w,z). –> wêk*(x,k(x))

I lys av (1) ser man lett at (8) impliserer (c).
Ad (d): Nå har man at k*(x,k(x)) Inkl k(x). Fra dette følger

(9) k*(x,k(x)) = k*(x,k(x))Ωk(x). Nå har vi tidligere vist at k(x)êV. Fra dette og aksiomet aΩxêV følger (10) aΩk(x)êV. Herav har man så ved hjelp av (9) at k*(x,k(x))êV om man setter inn "k*(x,k(x))" for "a" i (10).

Ad (xi). Anta (1) x,zêy & xêk*(Δ,y) & L(z,x). Fra den andre konjunkten og Definisjon 3.5 følger:

(2) (At)(Q;y(Δ,t) –> xêt). Vi ønsker å vise at zêk*(Δ,y). Anta derfor for vilkårlig t at (3) Q;y(Δ,t). Fra dette og Definisjon 3.4 følger:

(4) (Ax)(xêy & xêΔ –> xêt)
(5) (Ax)(Az)(x,zêy & x,zêt –> K(x,z)êt)
(6) (Ax)(Az)(x,zêy &xêt& L(z,x) –> zêt)

Fra (2) og (3) følger xêt. Dette, (1) og (6) impliserer zêt. Men t var et vilkårlig objekt der (3) holdt. Vi har derfor (At)(Q;y(Δ,t) –> zêt) og følgelig zêk*(Δ,y).

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for (x) og dermed også for Teorem 7.3. **Q.E.D.**

Man kan være interessert, på samme måte som ved k og ∑, i hva k*(x,y) er alt ettersom x og y inneholder bare setninger, ingen setninger, eller noen entiteter som er setninger, mens andre ikke er det. Videre kan man være interessert i å karakterisere k*(x,y) alt ettersom en av mengdene x og y er tom, eller begge er tomme. Vi skal straks formulere en sats som karakteriserer k*(x,y) i alle disse tilfellene. Men det er først hensiktsmessig å gi den følgende

definisjon:

**Definisjon 7.1**

(i) A;1(x) <–> (Az)(zêx –> Setn(z))
(ii) A;2(x) <–> (Az)(zêx –> ¬Setn(z))
(iii) A(x) <–> (Ey)(Ez)(x = yUz & (Aw)(wêy –> Setn(w)) &
(Aw)(wêz –> ¬Setn(w)) & y≠ø & z≠ø

Teoremet kan dernest formuleres slik:

**Teorem 7.4**

(i) k*(x,ø) = ø
(ii) k*(ø,y) = ø
(iii) k*(ø,ø) =ø
(iv) A;1(y) –> (Aw)(wêk*(x,y) –> Setn(w))
(v) A1;(x) & A;2(y). –> k*(x,y)=ø
(vi) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A1;(x) & A(y).–>
(Ez)(z Inkl y & (Aw)(wêz –> Setn(w)) &k*(x,y) = k*(x,z))
(vii) x≠ø& y≠ø & A2;(x) & A;1(y). –> k*(x,y)=ø
(viii) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A;2(x) & A;2(y).–> k*(x,y) = {ø}U(xΩy)
(ix) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A;2(x) & A(y).–> k*(x,y) = {ø}U(xΩy)
(x) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A;1(y) –>
(Ew)(w Inkl x & (Ar)(rêw –> Setn(r)) &k*(x,y) = k*(wΩy,y))
(xi) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A;2(y).–>
(Ep)(p Inkl x & (Az)(zêp –> ¬Setn(z)) & k*(x,y)=(pΩy)U{ø}
(xii) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A(y) .–>.
(Es)(Et)(s,t Inkl x & (Ew)(w Inkl y & k*(x,y) = k*(s,w)UtU{ø})) v
(Az)(zêk*(x,y) –> Setn(z)).

**Bevis:** Ad (i) – (iii). Disse påstandene følger umiddelbart ved hjelp av Teorem 7.3 (vii).

Ad (iv): Dette vises ved induksjon på k*(x,y). I lys av Teorem 7.3 (vi) vil det være tilstrekkelig å bevise:

(1) Mg(z: Setn(z))êV
(2) (Az)(zêxΩy –> Setn(z))
(3) (Az)(Aw)(z,wêy & Setn(z) & Setn(w) –> Setn(K(z,w)))
(4) (Az)(Aw)(z,wêy & Setn(z) & L(w,z) –> Setn(w)).

Fra antesedenten i dette punktet i teoremet følger umiddelbart (2). Videre følger (3) og (4) fra Teorem 3.1, punkt (vi) og (v). (1) følger fra ST10. Dette viser at denne delen av satsen holder.

Ad (v): Anta (1) A;1(x) og A;2(y). Fra dette følger ved hjelp av Definisjon 7.1 (2) (Az)(zêx –> Setn(z)) & (Az)(zêy –> ¬Setn(z)). Da har man xΩy=ø, for i motsatt fall ville det finnes noe z der man har Setn(z)&¬Setn(z). Fra xΩy=ø følger imidlertid ved hjelp av Teorem 7.3 (vii) at k*(x,y)=ø.

Ad (vi). Anta (1) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A1;(x) & A(y). Fra den siste konjunkten her følger at det finnes z,w slik at:

(2) y= zUw & (At)(têz–> Setn(t)) & (At)(têw –> ¬Setn(t)) & z≠ø & w≠ø.
Fra den nest siste konjunkten i (1) har man (2.1) (At)(têx –> Setn(t)). Fra den andre konjunkten i (2) følger A;1(z). Dette og punkt (iv) i teoremet impliserer:
(3) k*(x,z) Inkl Mg(z: Setn(z)). Nå har man også åpenbart i lys av (2) at z Inkl y. Fra dette og Teorem 7.3, (v) følger (4) k*(x,z) Inkl k*(x,y). Det er nødvendig å gi bevis for inklujonen den andre veien. Vi gjør dette ved induksjon på k*(x,y). Det vil være tilstrekkelig å godtgjøre:

(5) k*(x,z)êV
(6) (At)(têx & têy –> têk*(x,z))
(7) (At)(As)(t,sêy & t,sêk*(x,z). –> K(t,s)êk*(x,z))
(8) (At)(As)(t,sêy & têk*(x,z) & L(s,t). –> sêk*(x,z))

I lys av de mengdeteoretiske aksiomene som inngår i teorien, bla. ST10 og (3) følger k*(x,z)êV. Dette viser at (5) holder.

Anta (9) têx &têy. Det er da to muligheter:

Tilfelle (i): têz. I så fall har man ved hjelp av (9) at têx&têz og derfor i lys av Teorem 7.3 at têk*(x,z).

Tilfelle (ii): têw. Da har man i lys av (2) at ¬Setn(t). Men fra (2.1) og (9) følger Setn(t). Dette gir oss en motsigelse og viser at dette tilfellet er utelukket. I alle mulige tilfelle har man derfor têk*(x,z). Dette viser at (6) holder.

Anta (10) t,sêy & t,sêk*(x,z). Siden y=zUw ser vi på følgende tilfelle:
Tilfelle (i): t,sêz. Fra dette, (10) og Teorem 7.3 følger da K(t,s)êk*(x,z). Tilfelle (ii): sêz &têw. Fra dette og (2) ¬Setn(t) &Setn(s). Men fra (10) & (3) følger
Setn(s) og Setn(t). Dette strider mot (2) og viser at dette tilfellet er utelukket. Tilfelle (iii): têz & sêw. Dette tilfelle leder til en motsigelse på samme måtesom foregående tilfelle. Tilfelle (iv). t,sêw. Man kan resonnere på samme måte i dette tilfellet. Dette viser at (7) holder.

Anta (11) t,sêy & têk*(x,z) & L(s,t) Fra den andre konjunkten og (3) følger (12) Setn(t). Fra den tredje konjunkten og Teorem 3.1 følger (13) Setn(s). Fra (2) og (11) har vi t,sêwUz. Men siden (Aq)(qêw –> ¬Setn(q)) følger t,sêz. Dette, (11) og Teorem 7.3 impliserer at sêk*(x,z). Dette viser at (8) holder.

(5) – (8) impliserer at k*(x,y) Inkl k*(x,z). Sammen med (4) gir dette oss det vi ønsker siden (Aq)(qêz –> Setn(q)) & z Inkl y.

Ad (vii): Anta A;2(x) & A;1(y). Fra dette følger: (Az)(zêx –>¬ Setn(z)) og (Az)(zêy –> Setn(z)). Fra disse to forholdene kan man imidlertid slutte at det ikke finnes noe felles element i x og y. Med andre ord har man xΩy=ø. Fra dette kan man imidlertid ved hjelp av Teorem 7.3 slutte at k*(x,y)=ø.

Ad (viii). Anta (1) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A;2(x) & A;2(y). Fra de to siste konjunktene følger:

(2) (Az)(zêx –> ¬Setn(z)) & (Az)(zêy–> ¬Setn(z))

Nå har man ved hjelp av Teorem 7.3, punkt (i), (ii), at

(3) (Az)(zêx & zêy –> K(z,z)êk*(x,y)) Fra den første konjunkten i (1) følger følger at det finnes noe w slik at (4) wêx & wêy. Fra dette og (2) følger ¬Setn(w). Men fra dette og Teorem 3.1 følger K(w,w)=ø. Fra (3)og (4) har man
(5) K(w,w)êk*(x,y). Vi har følgelig øêk*(x,y). Fra Teorem 7.3, punkt (i), følger xΩy Inkl k*(x,y). Man må altså ha {ø}U(xΩy) Inkl k*(x,y). Dette viser at den ene halvdelen av (viii) holder.

For å gi bevis for den andre halvdelen benyttes Teorem 7.3, punkt (vi). Det vil være

tilstrekkelig å bevise gitt at (1) holder.:

(6) (As)(sêx & sêy –> sê({ø}U(xΩy)))

(7) (At)(As)(s,têy & s,tê({ø}U(xΩy)) –> K(s,t)ê{ø}U(xΩy))

(8) (At)(As)(s,têy & sê({ø}U(xΩy)) &L(t,s) –> tê{ø}U(xΩy))

(9) (xΩy)U{ø}êV

Av disse påstandene er (6) helt triviell siden xΩy Inkl {ø}U(xΩy). Når det gjelder (7): Anta s,têy. Fra dette og (1) følger ¬Setn(s) & ¬Setn(t). Herav har man så ved hjelp av Teorem 3.1 K(s,t)=øê{ø}U(xΩy). Et tilsvarende resonnement kan brukes ved (8): Anta (10) s,têy & sê({ø}U(xΩy)) &L(t,s). Da har man igjen ved hjelp av (1) at ¬Setn(s) & ¬Setn(t). Fra dette følger så ved hjelp av Teorem 3.1, punkt (v), at ¬L(t,s). Men fra dette og (10) følger L(s,t) & ¬L(s,t). Men dette impliserer setningslogisk tê{ø}U(xΩy). Når det gjelder (9) har man følgende: Fra Me1 og Me2 kan man slutte at (11) {ø}êV. Ved hjelp av Me4 følger (12) (xΩy)êV. Fra (11) og (12) følger så ved Me2 og Me3 at (xΩy)U{ø}êV.

Dette viser at (6) – (9) holder. Fra dette kan man så slutte at k*(x,y) Inkl (xΩy)U{ø}. Dette avslutter beviset for punkt (viii).

Ad (ix): Studerer man beviset for punkt (viii) ser man at man strengt tatt ikke behøver å benytte forutsetningen om at A;2(y). Punkt (viii) kan derfor skjerpes ved at vi erstatter antesedenten med xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A;2(x). Vi har altså strengt tatt bevist:

xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A;2(x) .–> k*(x,y) = {ø}U(xΩy)

Fra dette følger umiddelbart punkt (ix) i teoremet.

Ad (x): Anta (1) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A;1(y). Fra det at A(x) følger per definisjon at det finnes w,p slik at:

(2) x = wUp & (Az)(zêw –> Setn(z)) &
(Az)(zêp –> ¬Setn(z)) & w≠ø & p≠ø

Videre følger fra det at A;1(y) at (3) (Az)(zêy –> Setn(z)). I lys av Teorem 7.3, punkt (iii), har man k*(x,y) = k*(xΩy,y). Nå har man i lys av (2):

xΩy = (wUp)Ωy = (wΩy) U (pΩy) = wΩ y siden pΩy=ø i lys av (2) og (3). Derfor har man k*(x,y) = k*(wΩy,y). Fra dette og (2) følger så det man ønsker, nemlig:

(Ew)(w Inkl x & (Ar)(rêw –> Setn(r)) &k*(x,y) = k*(wΩy,y)). Dette viser at punkt (ix) holder.

Ad (xi): Anta (1) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A;2(y). Fra den fjerde konjunkten følger her, slik som i det foregående tilfellet:

(2) x = wUp & (Az)(zêw –> Setn(z)) &
(Az)(zêp –> ¬Setn(z)) & w≠ø & p≠ø

Videre følger fra den siste konjunkten i (1) at (3) (Az)(zêy –> ¬Setn(z)). Nå harman som i det foregående tilfellet at (4) k*(x,y) = k*(xΩy,y). Videre:

xΩy = (wUp)Ωy = (wΩy) U (pΩy) = pΩy siden wΩy=ø i lys av (2) og (3). Det følger derfor ved hjelp av (4) at k*(x,y) =k*(pΩy,y). Vi sondrer nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): pΩy=ø. I så tilfelle har vi ved hjelp av (2) og (3) at xΩy=ø. Dette strider imidlertid mot (1). Det følger at dette tilfellet er utelukket.

Tilfelle (b): pΩy≠ø. I så fall har vi (5) (pΩy)Ωy≠ø Vi har også i lys av (2) og (3) at A;2(pΩy) & A;2(y). Men fra dette, punkt (viii), og (1) følger i så fall at

(6) k*(x,y)= k*(yΩp,y) = {ø}U((yΩp)Ωy) = (pΩy)U{ø}. Fra dette og (2) følger det vi ønsker nemlig:

(Ep)(p Inkl x & (Az)(zêp –> ¬Setn(z)) & k*(x,y)=(pΩy)U{ø}

Dette viser at punkt (xi) holder.

Ad (xii): Anta (1) xΩy≠ø & x≠ø& y≠ø & A(x) & A(y). Fra de to siste komponentene følger her ved hjelp av Definisjon 7.1 at:

(2) x = w;1Up;1 & (Az)(zêw;1 –> Setn(z)) &
(Az)(zêp;1 –> ¬Setn(z)) & w;1≠ø & p;1≠ø og

(3) y = w;2Up;2 & (Az)(zêw;2 –> Setn(z)) &
(Az)(zêp;2 –> ¬Setn(z)) & w;2≠ø & p;2≠ø

Vi skiller mellom to tilfelle:

Tilfelle (a): p;1Ωp;2≠ø. Fra (2) og (3) har man (4) w;1Ωw;2 Inkl x og dessuten (5) w;2 Inkl y. Fra (5) og Teorem 7.3 følger

(6) k*(w;1Ωw;2,w;2) Inkl k*(w;1Ωw;2,y)

Videre følger fra (4) ved hjelp av Teorem 7.3:

(7) k*(w;1Ωw;2,y) Inkl k*(x,y) Fra (6) og (7) har vi:

(8) k*(w;1Ωw;2,w;2) Inkl k*(x,y)

Siden p;1 Inkl x & p;2 Inkl y følger p;1Ωp;2 Inkl xΩy. Fra Teorem 7.3 har vi xΩy Inkl k*(x,y). Det følger at vi har (9) p;1Ωp;2 Inkl k*(x,y). Fra p;1Ωp;2≠ø følger at det finnes z slik at zêp;1Ωp;2. Fra dette og (9) har man (10) zêk*(x,y). Siden zêp2 har vi zêy. Dette, (10) og Teorem 7.3 impliserer at K(z,z)êk*(x,y). Men zêp1 og derfor har man ¬Setn(z). Det følger fra dette og Teorem 3.1 at K(z,z)=ø. Man har derfor øêk*(x,y) og følgelig (11) {ø} Inkl k*(x,y). Fra (8), (9) og (11) følger:

(12) k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø} Inkl k*(x,y)

Vi ønsker nå å vise det omvendte av (12) nemlig:

(+) k*(x,y) Inkl k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}

Vi gjør dette ved induksjon på k*(x,y) i overenstemmelse med punkt (vi) i Teorem 7.3. Det vil være tilstrekkelig å bevise følgende påstander:

(13) (k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})êV

(14) (Az)(zêw;1Up;1 & zêw;2Up;2 –> zêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})

(15) s,zêy & z,sêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}). –>
K(z,s)êk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}).

(16) z,sêy & sêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}) & L(z,s). –>
zêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})

Her følger (13) lett ved hjelp av de mengdeteoretiske aksiomene i teorien og andre satser som har blitt bevist.

La oss gi et bevis for (14): Anta zêw;1Up;1 & zêw;2Up;2. Da har vi siden

xΩy = (w;1Up;1)Ω(w;2Up;2)
= (w;1Ωw;2)U (w;1Ωp;2)U (p;1Ωp;2)U(p;1Ωw;2)
= (w;1Ωw;2)U(p;1Ωp;2)

siden w;1Ωp;2=ø og p;1Ωw;2=ø følger fra (2) og (3) at (17) zê(w;1Ωw;2)U(p;1Ωp;2). Er zêp;1Ωp;2 er det åpenbart at zêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}). Er zêw;1Ωw;2 har man zê(w;1Ωw;2)Ωw;2, og derfor zêk*(w;1Ωw;2,w;2). Påstanden holder følgelig også i dette tilfellet.

Bevis for (15): Anta:

(18) s,zêy & z,sêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})

Siden y=p;2Uw;2 følger det at s,zê(p;2Uw;2), Vi sondrer mellom fire tilfeller:

Tilfelle (a): z,sêw;2. Da har man i lys av (3) at (19) Setn(s)&Setn(z). I så fall har man s≠ø & z≠ø og videre at ¬(s,zê(p;1Ωp;2)). Fra dette og (18) kan man derfor slutte z,sêk*(w;1Ωw;2,w;2). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 7.3 at K(z,s)êk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}). Påstanden holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (b): zêw;2 &sêp;2. Da har vi ¬Setn(s) og derfor at

K(s,z)=ø ê{ø} Inkl k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})

Tilfelle (c): zêp;2 & sêw;2. Man går da frem på nøyaktig samme måte som i det forrige tilfellet.

Tilfelle (d): z,sêp;2. Da har vi ¬Setn(s) og derfor at

K(s,z)=ø ê{ø} Inkl k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø})

Dette viser at (15) holder.

Bevis for (16): Anta

(20) z,sêy & sêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø} & L(z,s)

Fra den siste konjunkten følger her ved hjelp av Teorem 3.1 punkt (v) at

(21) Setn(z) & Setn(s). Fra dette, (2), (3), det forhold at ¬Setn(ø) og den andre konjunkten i (20) følger (22) sêk*(w;1Ωw;2,w;2). Siden z,sêy har vi siden y=w;2Up;2 og (21) holder at

(23) z,sêw;2. Fra (22), (23) og det forhold at L(z,s) følger så ved hjelp av Teorem 7.3, punkt (xi) at zêk*(w;1Ωw;2,w;2). Det følger derfor at zêk*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}. Dette viser at (16) holder.

Vi har nå vist at (+) holder. Dette viser at

k*(x,y)= k*(w;1Ωw;2,w;2) U(p;1Ωp;2)U{ø}. Om vi setter t= p;1Up;2, videre w=w;2 & s=w;1Ωw;2 følger det at vi i dette tilfellet har:

(Es)(Et)(s,t Inkl x & (Ew)(w Inkl y & k*(x,y) = k*(s,w)UtU{ø}))

Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

Tilfelle (b): p;1Ωp;2=ø. I dette tilfellet har man:

xΩy = (w;1Up;1)Ω(w;2Up;2)

= (w;1Ωw;2)U (w;1Ωp;2)U (p;1Ωp;2)U(p;1Ωw;2)

= (w;1Ωw;2) siden w;1Ωp;2=ø og p;1Ωw;2=ø følger fra (2) og (3).

Fra dette og Teorem 7.3 har man:

k*(x,y) = k*(xΩy,y) = k*(w;1Ωw;2, w;2Up;2)

Men vi har A;1(w;1Ωw;2). I lys av (3) og det vi har bevist under (vi) ovenfor har vi k*(w;1Ωw;2, w;2Up;2) = k*(w;1Ωw;2,w;2). Men vi har A;1(w;2) og derfor ved hjelp av (iv) at (Az)(zêk*(w;1Ωw;2,w;2) –> Setn(z)). Det følger at (Az)(zêk*(x,y) –> Setn(z)). Dette viser at satsen også holder i dette tilfellet.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Teorem 7.4. **Q.E.D.**

# Referanser


Rognes [1] Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985

Quine [1] Quine, Willard van Orman, *Set Theory and Its Logic*, Cambridge, Masschusetts: Harvard University press, 1963.

Quine [2] Quine, Willard van Orman, *Methods of Logic*, London: Routledge and Kegan Paul, 1952, Second edition revised, 1962.

Quine [3] Quine, Willard van Orman, *Mathematical logic*, New York: Harper Torchbook, 1962

# Appendix I

**En sats i setningslogikken.**

Vi skal gi bevis for den følgende sats som er av interesse i forbindelse med de teoremene som har blitt bevist i hoveddelen av denne avhandlingen.

**Teorem:** Ethvert ikke-kontradiktorisk og ikke-tautologisk skjema S i utsagnskalkylen er ekvivalent med et skjema K som er en konjunksjon av 2^n'te ikke-tautologiske og ikke-kontradiktoriske konjunkter S;1,...,S;(2^n) hvor hver konjunkt ikke isolert er utledbar fra noen ekte delkonjunksjon K' (muligens degenerert) av K (n≥1).

**Bevis:** Siden S er et utsagnslogisk skjema inneholder det bare endelig mange setningsbokstaver. La oss anta at disse er p;1,...,p;k. Vi velger ut et nytt set av setningsbokstaver q;1,...,q;n som alle er distinkte og som alle er forskjellige fra de diverse p;1,...,p;k. Vi betrakter så alle konjunksjoner a1q;1& ... &anq;n der aj enten er ¬ eller et tomtsted. Det finnes 2^n slike konjunksjoner: Q;1,....,Q;(2^n). Videre er det lett å se at

(a) Q;1 v .... v Q;(2^n)

er en tautologi. La nemlig V være en vilkårlig verditilordning som tilordner sannhetsverdier til setningsbokstavene q;1,...,q;n og anta at Q;1v...vQ;(2^n) kommer ut som falsk under denne tilordningen. Da må også alle de diverse Q;1,...,Q;(2^n) komme ut som falske. Men er V en verditilordning av sannhetsverdier til q;1,...,q;n er det alltid mulig å lage en konjunksjon av typen a1q;1&... &anq;n som kommer ut som sann under V. Er q;i tilordnet T av V lar vi aiq;i være q;i. Er q;i tilordnet F av V lar vi aiq;i være ¬q;i. Man ser lett at konjunksjonen a1q;1&....&anq;n dannet etter disse reglene vil være sann under V og at den vil være en av Q1,....,Q;(2^n). Men dette strider mot at Q;i er falsk for i=1,...,2^n.

Siden Q1v...vQ;(2^n) som konstruert ovenfor er en tautologi er

(2) Q1v...vQ;(2^n) –> S

ekvivalent med S. Videre har vi at (2) er ekvivalent med:

(3) (Q1 –>S)& ..... & (Q;(2^n) –> S)

som da også selvfølgelig er ekvivalent med S. Dette er en konjunksjon med 2^n'te konjunkter.

(a) Ingen av konjunktene i (3) er tautologiske. La oss betrakte en vilkårlig konjunkt (4) Q;r –> S. Definer en verditilordning V slik: p;1,...,p;k tilordnes sannhetsverdier slik at S blir usann. Dette er mulig siden S er et ikke-tautologisk skjema. V tilordner q;i (i=1,...,n), som er en ingrediens i Q;r, T om ¬q;i er en konjunkt i Q;r. Ellers tilordner V q;i verdien F. Det er lett å se at (4) blir falsk under denne intepretasjonen. Antesedenten blir sann, mens konsekventen blir usann. Et lignende resonnement viser også at alle de andre konjunktene i (3) kommer ut som falske under en eller annen verditilordning.

(b) Ingen av konjunktene i (3) er kontradiktoriske. La Q;i–>S være en slik konjunkt. Definer en verditilordning V på den følgende måte: V tilordner alle setningsbokstavene p;1,...,p;k verdien F. Den tilordner q;j verdien T om ¬q;j er en konjunkt i Q;i ellers tilordner den q;j verdien F. (j=1,...,n). Gitt denne verditilordningen V blir antesedenten i Q;r–>S usann og derfor hele kondisjonalen sann. Dette viser Q;i –> S ikke er kontradiktorisk. Et lignende resonnement viser at de andre komponentene i (3) er ikke-kontradiktoriske.

(c) Vi viser at S ikke er utledbar fra noen ekte delkonjunksjon K' av (3). Enhver slik delkonjunksjon av (3) er ekvivalent med et skjema av typen:

(5) D –> S

der D er en disjunksjon med mindre en 2^n'te disjunkter og der disjunktene er blandt Q;1,...,Q;(2^n). Siden S er ikke-tautologisk finnes en verditilordning som tilordner p;1,...,p;k

sannhetsverdier slik at S blir falsk. Vi begrenser denne tilordningen til p;1,...,p;k og utvider begrensningen til en verditilordning V som også tilordner sannhetsverdier til q;1,...,q;n på følgende måte. Vi betrakter en konjunksjon Q;j som ikke er noen disjunkt i D, men som er blandt Q;1,....,Q;(2^n). Q;j inneholder som ingredienser setningsbokstavene q;1,...,q;n. V defineres slik at om den i'te konjunkten i Q;j er ¬q;i så er V(q;i)=F og om den i'te konjunkten er q;i så er V(q;i)=T. Vi viser at D blir falsk under denne intepretasjonen.

La nemlig Q;i være en vilkårlig disjunkt i D. Den må være forskjellig fra Q;J. Dette innebærer at en eller annen konjunkt i den må være forskjellig fra den tilsvarende i Q;j. Anta at de er forskjellige ved den k'te konjunkt.

(i) Hvis denne er q;k i Q;j må den tilsvarende konjunkt være ¬q;k i Q;i. Men da må vi ha etter definisjonen av V at V(q;k)=T og derfor at V(¬q;k)=F og derfor at V(Q;i)=F siden ¬q;k er en konjunkt i Q;i.

(ii) Hvis den k'te konjunkten i Q;j er ¬q;k er den k'te konjunkten i Q;i, q;k. Etter definisjonen av V har man i dette tilfellet at V(q;k)=F og derfor at V(Q;i)=F.

I begge tilfellene tilordnes Q;i verdien F av V. Men Q;i var en vilkårlig disjunkt i D. Derfor må alle disjunktene være i D komme ut som usanne under V. Dette innebærer at D selv må bli falsk under V. Men dette innebærer at
V(D –>S)=T, fordi (D–>S) har en usann antesedent, mens V(S)=F. Dette impliserer åpenbart at S ikke er utledbar fra D–>S.

(a),(b) og (c) gir en et fullstendig bevis for påstanden. **Q.E.D.**